Министерство образования и науки РФ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

В. Н. Степанов

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Омск
Издательство ОмГТУ
2010

УДК 519.8(075)
ББК 22.176я73
С 79

Рецензент:

Г.Н.Бояркин, доктор экономических наук, профессор.

Степанов В. Н.
С 79 **Типовой расчет по дискретной математике:** методические указания / В. Н. Степанов. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010. – с.

Основное назначение данного методического указания – методическое обеспечение курса "Дискретная математика". Для студентов инженерных специальностей.

Автор выражает благодарность Т. Г. Царицинской, зав. методическим кабинетом кафедры «Высшая математика» за большую помощь в техническом оформлении рукописи.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Оглавление

Типовой расчет по дискретной математике

Задача 1. Операции над множествами

Доказать тождества или включения, упростить выражения, используя определения операций над множествами или свойства операций над множествами.

1. а) $(\bar{A}\cup B)\cap A=A\cap B$;	б) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.
2. а) $A\,\Delta A\,\Delta A=A$;	б) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.
3. а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;	б) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.
4. а) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;	б) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.
5. а) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;	б) $A\cup B\subset C\Rightarrow A\times B=(A\times C)\cap(C\times B)$.
6. а) $(A\cap B)=\left(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}\right)$;	б) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.
7. а) $(\bar{A}\cap B)=\left(\overline{A\cup\bar{B}}\right)$;	б) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.
8. а) $(A\setminus B)\cup B=A\Leftrightarrow B\subset A$;	б) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap\overline{\left(\bar{B}\times C\right)}$.
9. а) $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$;	б) $C\subseteq D\Rightarrow A\times C\subseteq A\times D$.
10. а) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$;	б) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup$ $(B\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times D)$.
11. а) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;	б) $A\subseteq C,\ B\subseteq D\Rightarrow$ $A\times B=(A\times D)\cap(C\times B)$.
12. а) $(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)$;	б) $U^2\setminus(A\times B)=(\bar{A}\times U)\cup(U\times\bar{B})$.
13. а) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;	б) $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus(A\cup C)$.
14. а) $A\setminus(B\setminus C)\supset(A\setminus B)\setminus(A\setminus C)$;	б) упростить: $\overline{(C\setminus A)\cap(C\setminus B)}$.
15. а) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(C\setminus A)$, $A,\ B\neq\varnothing$;	б) $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times D\Rightarrow$ $A=B=C=D$.
16. а) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$;	б) $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$.
17. а) $(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})=$ $=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})=A$;	б) $C\subseteq B\Rightarrow A\cap C\subseteq A\cap B$.

18. а) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=$ $=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$;	б) $C\subseteq B\Rightarrow A\cup C\subseteq A\cup B$.
19. а) $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;	б) упростить: $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B$.
20. а) $A\setminus(B\cap C)\supset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;	б) упростить: $A\setminus(B\setminus(C\setminus A))$.
21. а) $(A*A)*(B*B)=A\cup B$, где $A*B=\overline{A\cap B}$;	б) упростить: $\overline{A\cup B\cap\overline{C}}\cup C$.
22. а) $(A*B)*(A*B)=A\cap B$, где $A*B=\overline{A\cap B}$;	б) упростить: $A\cup B\cup((\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}))$.
23. а) $(A\Delta B)\setminus C=(A\setminus C)\Delta(B\setminus C)$;	б) упростить: $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$.
24. а) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;	б) упростить: $\overline{\overline{A\cap\overline{B}}\cap C}\cap B$.
25. а) $\overline{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}}=\overline{A\cup B}$;	б) $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$.

Задача 2. Матрицы отношений

Даны два множества: $A=\{a;b;c\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$. $P\subseteq A\times B$, $Q\subseteq B\times B$ – отношения. Изобразить отношения P и Q графически. Найти матрицу $\left[(P\circ Q)^{-1}\right]$. Проверить с помощью матрицы $[Q]$ является ли отношение Q рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

1.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
2.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
3.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle\}$.

4.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
5.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$.
6.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$.
7.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
8.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$.
9.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$.
10.	$P=\{\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
11.	$P=\{\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.
12.	$P=\{\langle b,1\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
13.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
14.	$P=\{\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle a,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.
15.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

16.	$P=\{\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
17.	$P=\{\langle a,3\rangle,\langle b,4\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.
18.	$P=\{\langle a,3\rangle,\langle b,4\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,4\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.
19.	$P=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
20.	$P=\{\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle a,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
21.	$P=\{\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$.
22.	$P=\{\langle b,1\rangle,\langle a,3\rangle,\langle a,4\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,4\rangle,\langle b,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
23.	$P=\{\langle a,3\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,4\rangle,\langle c,3\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$.
24.	$P=\{\langle b,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.
25.	$P=\{\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle a,4\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,4\rangle\}$, $Q=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.

Задача 3. Отношения

1. Найти область определения и область значений отношений P и Q: $P=\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid |x|+2|y|=1\}$; $Q=\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid (y\geq 0)\cap(y\leq x)\cap(x+y\leq 1)\}$. Представить отношение P в виде объединения четырех отношений, а отношение Q в виде пересечения трех отношений.

2. Пусть на множестве людей отношение $P\equiv$(быть братом), а отношение $Q\equiv$(быть сестрой). Установить основные свойства отношений: $P\cup Q$, $P\cap Q$, $P\setminus Q$.

3. Пусть P и Q – отношения на $\mathbf{N}$ такие, что $P=\{\langle x,\, x+1\rangle\mid x\in\mathbf{N}\}$, $Q=\{\langle x^2,\, x\rangle\mid x\in\mathbf{N}\}$. Найти отношения $P\circ Q,\ P^n,\ Q^n$.

4. Пусть P и Q – отношения на $\mathbf{N}$ такие, что $P=\{\langle x,\, x+1\rangle\mid x\in\mathbf{N}\}$, $Q=\{\langle x^2,\, x\rangle\mid x\in\mathbf{N}\}$. Найти отношения $Q\circ P,\ P^{-1},\ Q^{-1},\ \bar{P},\ \bar{Q}$.

5. Пусть $P=\{\langle x,\, y\rangle\mid y=x+1,\ x\in\mathbf{N}\}$ – отношение на $\mathbf{N}$. Найти транзитивное замыкание отношения P.

6. Пусть A – множество всех людей. Описать транзитивные замыкания отношений $P,\ Q,\ P\circ Q^{-1},\ P^2,\ Q^2$, где $xPy\equiv\{x$ отец $y\}$, $xQy\equiv\{x$ дочь $y\}$.

7. Составить анкету отношения $P=\{\langle a,\,a\rangle,\langle a,\,b\rangle,\langle c,\,a\rangle,\langle b,\,d\rangle,\langle a,\,d\rangle,\langle b,\,c\rangle\}$ на множестве $X=\{a,\,b,\,c,\,d\}$. Найти матрицу отношения P и построить его граф.

8. Установить основные свойства отношений P и Q, заданных на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел: $mPn\equiv\{(m+n)$ кратно трем$\}$, $mQn\equiv\{(m-n)$ кратно трем$\}$.

9. Показать, что отношение $P\equiv\{i\leq j\}$ на множестве $\mathbf{N}$ задается треугольной матрицей. Установить основные свойства этого отношения.

10. Описать свойства отношения P: $xPy\equiv\{|x+y|\leq 5\}$, заданного на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел.

11. Описать свойства отношения P: $mPn\equiv\{\exists k\in\mathbf{N}$ такое, что $(m-n)=7k\}$, заданного на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

12. Показать, что отношение P на $\mathbf{N}$ «иметь одинаковый остаток при делении на 3» является отношением эквивалентности.

13. Пусть **C** – множество комплексных чисел. Установить основные свойства отношений P и Q:

$$z_1 P z_2 \equiv \{|z_1| = |z_2| : z_1, z_2 \in \mathbf{C}\}; \; z_1 Q z_2 \equiv \{\arg z_1 = \arg z_2 : z_1, z_2 \in \mathbf{C}\}.$$

14. Пусть **C** – множество комплексных чисел. На множестве **C** задано отношение P: $z_1 P z_2 \equiv \{(\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2)$ или $(\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $Jm\, z_1 < Jm\, z_2)\}$. Установить основные свойства отношения P.

15. Пусть **C** – множество комплексных чисел. На множестве **C** задано отношение P: $z_1 P z_2 \equiv \{(|z_1| < |z_2|$ или $|z_1| = |z_2|, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и $\arg z_1 < \arg z_2)\}$. Установить основные свойства отношения P.

16. Пусть **C** – множество комплексных чисел. Установить основные свойства отношения P: $z_1 P z_2 \equiv \{|z_1| = |z_2|, \arg z_1 > \arg z_2\}$.

17. Построить линейный порядок на множестве комплексных чисел.

18. Пусть $x P y \equiv \{(x > 1) \Rightarrow (y > 1), \; x, y \in \mathbf{R}\}$. Установить основные свойства отношения P.

19. Установить основные свойства отношения P: $x P y \equiv \{x - y = \pi k : x, y \in \mathbf{R}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ – произвольное целое число.

20. Установить, какие из следующих отношений на **N** рефлексивны, антирефлексивны, симметричны, антисимметричны, асимметричны и транзитивны: a) $m P n \equiv \{(m+n) - \text{степень двойки}\}$, b) $m Q n \equiv \left\{\frac{m}{n} - \text{нечетное число}\right\}$.

21. Пусть M_n – множество невырожденных квадратных матриц A, B, … порядка n, φ – отношение на M_n: $A \varphi B \equiv \{\det A^{-1} > \det B^{-1}\}$. Является ли отношение φ отношением строгого (нестрогого) порядка на множестве M_n?

22. Показать, что на множестве $\mathbf{R}^2$ отношение P: $\langle x, y\rangle P \langle u, \upsilon\rangle \equiv \equiv (x^2 + y^2 = u^2 + \upsilon^2)$ является отношением эквивалентности. Определить фактор-множество по этому отношению эквивалентности.

23. На множестве $\mathbf{R}^2$ рассмотрим отношение Парето Π: $\langle x, y\rangle \Pi \langle u, \upsilon\rangle \Leftrightarrow x \le u, \; y \le \upsilon$. Установить основные свойства отношения Π.

24. Показать, что на множестве □ отношение P: $m P n \equiv \{m$ является целым кратным $n\}$ есть отношение нестрогого порядка.

25. Найти область определения, область значений отношения $P \subseteq \mathbf{R}^2$: $\langle x, y \rangle \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Является ли это отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным?

26. Отношение P на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел задано условием: $xPy = \{x - y$ целое число$\}$. Доказать, что P – отношение эквивалентности и описать классы эквивалентности чисел $0, 1/2$ и $\sqrt{2}$.

27. Какие из следующих отношение, заданных на множестве всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$, являются отношениями порядка:

a) $f(x) P\, g(x)$, если $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b]$;

b) $f(x) Q\, g(x)$, если $\int\limits_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \le 0$;

c) $f(x) S\, g(x)$, если $\exists$ такие $x_1, x_2 \in [a,b]$, что $f(x_1) \le g(x_2)$.

28. Какие из следующих отношение, заданных на множестве всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$, являются отношениями порядка:

a) $f(x) P\, g(x)$, если $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \le \max\limits_{x \in [a,b]} g(x)$;

b) $f(x) Q\, g(x)$, если $f(a) \le g(a)$ и $f(b) \le g(b)$.

29. На множестве всех бесконечных последовательностей действительных чисел заданы нижеследующие бинарные отношения. Выяснить какие из них являются отношениями порядка

a) $\{a_n\} P \{b_n\}$, если $a_k \le b_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$;

b) $\{a_n\} Q \{b_n\}$, если найдется такое m, что $a_k = b_k$ для всех $k \ge m$;

c) $\{a_n\} S \{b_n\}$, если найдется такое m, что $a_k \le b_k$ для всех $k \ge m$.

30. На множестве всех бесконечных последовательностей действительных чисел заданы нижеследующие бинарные отношения. Выяснить какие из них являются отношениями эквивалентности

a) $\{a_n\} P \{b_n\}$, если $a_k \le b_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$;

b) $\{a_n\} Q \{b_n\}$, если найдется такое m, что $a_k = b_k$ для всех $k \ge m$;

c) $\{a_n\} S \{b_n\}$, если найдется такое m, что $a_k \le b_k$ для всех $k \ge m$.

31. Какими из свойств (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, асимметричность, транзитивность обладают полное, тождественное и пустое отношение?

32. Что можно сказать об отношении $\overline{P}$, если отношение P: a) рефлексивно; b) антирефлексивно; c) симметрично; d) антисимметрично; e) асимметрично; f) транзитивно?

33. Доказать, что если отношение P обладает каким либо из свойств a) рефлексивно; b) антирефлексивно; c) симметрично; d) антисимметрично; e) асимметрично; f) транзитивно, то обратное отношение P^{-1} также обладает этим свойством.

34. Пусть отношения P и Q на множетсве A a) рефлексивны; b) антирефлексивны; c) симметричны; d) антисимметричны; e) асимметричны; f) транзитивны. Какими из перечисленных свойств обладает отношение $P \cap Q$?

35. Пусть отношения P и Q на множетсве A a) рефлексивны; b) антирефлексивны; c) симметричны; d) антисимметричны; e) асимметричны; f) транзитивны. Какими из перечисленных свойств обладает отношение $P \cup Q$?

36. Доказать, что транзитивное замыкание P любого транзитивного отношения P – транзитивное отношение.

37. Доказать, что транзитивное замыкание P любого симметричного отношения – симметричное отношение.

38. Доказать, что если отношение P транзитивно и рефлексивно, то $P^2 = P$.

39. Доказать, что если P и Q – рефлексивные отношения, то $P \cup Q \subseteq P \circ Q$.

40. Доказать, что если P и Q – рефлексивные и симметричные отношения, то следующие условия равносильны: (a) $P \circ Q$ – симметричное отношение; (b) $P \circ Q = Q \circ P$.

В задачах 41-50 доказать или опровергнуть следующие свойства отношений P, Q, S на множестве X:

41. $\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$.

42. $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$.

43. $(P \cup Q)^{-1} = P^{-1} \cup Q^{-1}$.

44. $(P \cap Q)^{-1} = P^{-1} \cap Q^{-1}$.

45. $(\overline{P})^{-1} = \overline{P^{-1}}$.

46. $\left(P\setminus Q\right)^{-1}=P^{-1}\setminus Q^{-1}$.

47. $P\subseteq Q\Rightarrow P^{-1}\subseteq Q^{-1}$.

48. $\left(P\circ Q\circ S\right)^{-1}=S^{-1}\circ Q^{-1}\circ P^{-1}$.

49. $\left(P\cup Q\right)\circ S=\left(P\circ S\right)\cup\left(Q\circ S\right)$.

50. $\left(P\setminus Q\right)\circ S=\left(P\circ S\right)\setminus\left(Q\circ S\right)$.

Задача 4. Функции

1. Пусть $A=\{1,2,3,...,n\}$. Доказать, что если функция f: $A\to A$ принимает значения *на* A, то она взаимно-однозначная, и что если f взаимно-однозначная функция, то она принимает значения *на* A.

2. Пусть f: $\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}$, где $f\left(x\right)=\int\limits_{1}^{x}\frac{dt}{t}$. Показать, что f – биекция и найти обратную ей функцию.

3. Пусть A, B, C – произвольные множества. Указать: a) биекцию $A\times B$ на $B\times A$; b) биекцию $\left(A\times B\right)\times C$ на $A\times\left(B\times C\right)$.

4. Построить функцию f: $A\to A$, где $A=\{0,1\}$, не имеющую обратной.

5. Показать, что на множестве $A=\{-1,0,1\}$ отношение $f=\left\{\left\langle x,x^{2}\right\rangle : x\in A\right\}$ является функцией, не имеющей обратной.

6. Доказать, что если функции $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ – инъекции, то $f\circ g:X\to Z$ – инъекция.

7. Доказать, что для любой функции $f:X\to Y$ и произвольных множеств $A\subseteq Y$ и $B\subseteq Y$ из условия $A\cap B=\varnothing$ следует: $f^{-1}\left(A\right)\cap f^{-1}\left(B\right)=\varnothing$.

8. Пусть A – любое множество из области определения функции $f:X\to Y$. Как соотносятся множества A и $f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)$? Привести пример.

9. Доказать, что композиция двух биективных функций $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ – биективная функция.

10. Доказать, что для любой функции $f:X\to Y$ и произвольных множеств $A\subseteq X$ и $B\subseteq X$ из условия $A\subseteq B$ следует: $f\left(A\right)\subseteq f\left(B\right)$.

11. Доказать, что если функция $f:X\to Y$ биективна, то $f\circ f^{-1}=I_X$, где $I_X:X\to X$ – тождественная функция.

12. Доказать, что если функция $f: X \to Y$ биективна, то $f^{-1} \circ f = I_Y$, где $I_y: Y \to Y$ – тождественная функция.

13. Доказать, что для любой функции $f: X \to Y$ и произвольных подмножеств A и B из X: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

14. Доказать, что для любой функции $f: X \to Y$ и произвольных подмножеств A и B из X: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Привести пример. В каком случае включение можно заменить равенством?

15. Доказать, что для любой функции $f: X \to Y$ и произвольных подмножеств A и B из X: $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$.

16. Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ – функции и g сюръективна. Будет ли функциия $f \circ g$ сюръективной?

17. Пусть V – множество векторов в $\mathbf{R}^3$, функция $f: V \times V \times V \to \mathbf{R}^1$ ставит в соответствие каждой упорядоченной тройке векторов их смешанное произведение. Найти $D(f), R(f)$. Является ли функция f инъективной, сюрьективной или биективной?

18. Пусть M – множество квадратных матриц. Функция $f: \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ ставит в соответствие паре матриц их произведение. Найти $D(f), R(f)$. Является ли функция f инъективной, сюрьективной или биективной?

19. Рассмотрим функции $f_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1,2,3$. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = x^5 - x^3$, $f_3(x) = -3x + 5$. Показать, что функция $f_1(x)$ – инъективна, но не сюрьективна; $f_2(x)$ – сюрьективна, но не инъективна; $f_3(x)$ – биективна.

20. Пусть V – множество векторов из $\mathbf{R}^3$, функция $f: V \times V \to V$ ставит в соответствие каждой паре векторов их векторное произведение. Найти $D(f), R(f)$. Является ли функция f инъективной, сюрьективной или биективной?

21. Пусть M – множество матриц. Функция $f: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ ставит в соответствие каждой матрице $A \in \mathrm{M}$, транспонированную матрицу A^T. Найти $D(f), R(f)$. Является ли функция f инъективной, сюрьективной или биективной?

22. Для произвольных множеств A, B, C указать биекцию множества $A \times (B \cup C)$ на множество $(A \times B) \cup (A \times C)$.

23. Дана функция $f = \left\{ \left\langle x, \dfrac{x}{x-1} \right\rangle : -2 \le x < 1 \right\}$. Найти область определения, область значений этой функции. Доказать, что f – биективная функция и найти обратную ей функцию. Построить график функции f.

24. Существует ли непрерывная биекция $f(x)$ отрезка $[a, b]$ на $(-\infty, \infty)$?

25. Существует ли непрерывная биекция $f(x)$ отрезка [10, 11] на $[0,1] \cup [3,4]$?

Задача 5. Эквивалентные множества. Мощность

1. Установить биекцию между полуинтервалом $(0,1]$ и интервалом $(2,\infty)$.

2. Установить биекцию между множеством рациональных чисел отрезка $[a, b]$ и множеством рациональных чисел отрезка $[c, d]$, где a, b, c, d – рациональные числа.

3. Установить биекцию между множеством рациональных чисел отрезка [0, 1] и множеством рациональных чисел больших числа 2.

4. Установить биекцию между множеством точек прямой и множеством точек полуокружности.

5. Установить биекцию между множеством точек произвольной окружности и множеством точек прямой.

6. Установить биекцию между множеством точек замкнутого круга и множеством точек открытого круга.

7. Установить биекцию между множеством точек окружности и множеством точек круга.

8. Указать биекцию между точками куба и ребром куба.

9. Установить биекцию между точками прямоугольника $P = \{(x, y): a < x < b;\ c < y < d\}$ и точками плоскости $\mathbf{R}^2 = \{(x, y): -\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty\}$.

10. Установить биекцию между точками плоскости $\mathbf{R}^2$ и точками полуплоскости $y \geq 0$.

11. Установить биекцию между точками полосы $\Pi = \{(x,y): a < x \leq b;\ -\infty < y < \infty\}$ и точками плоскости $\mathbf{R}^2 = \{(x, y): -\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty\}$.

12. Установить биекцию между точками полосы $\Pi_1 = \{(x,y): a \leq x < b;\ -\infty < y < \infty\}$ и точками полосы $\Pi_2 = \{(x, y): -\infty < x < \infty;\ c < y \leq d\}$.

13. Установить биекцию между точками открытого круга и точками дополнения к его замыканию.

14. Установить биекцию между поверхностью сферы с одной выколотой точкой и плоскостью.

15. Установить биекцию между всей поверхностью сферы и плоскостью.

16. Установить биекцию между множеством всех рациональных чисел отрезка [0, 1] и множеством всех точек квадрата [0, 1]×[0, 1] с рациональными координатами.

17. Установить биекцию между точками окружности и точками сторон квадрата.

18. Установить биекцию между точками открытого круга и точками замкнутого квадрата.

19. Установить биекцию между точками эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и точками окружности $x^2+y^2=16$.

20. Установить биекцию между точками линий $\rho=\cos 4\varphi$ и $\rho=\sin 4\varphi$; ρ и φ – полярные координаты.

21. Установить биекцию между точками кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$ и точками окружности; ρ и φ – полярные координаты, $0\le\varphi<2\pi$.

22. Установить биекцию между множеством $[0,\ 1]\cup[2,\ 3]\cup[4,\ 5]\cup\ldots$ и отрезком [0, 1].

23. Установить биекцию между множеством всех многочленов с рациональными коэффициентами и множеством всех натуральных чисел.

24. Установить биекцию между точками открытого единичного круга и внутренними точками пятиконечной звезды.

25. Установить биекцию между точками графиков функций $y=\sin x$, $-\infty<x<\infty$ и $y=tg\ x$, $-\pi/2<x<\pi/2$.

26. Доказать, что множество всех окружностей на плоскости с рациональными радиусами и рациональными координатами центров счетно.

27. Доказать, что на плоскости можно построить не более чем счетное множество попарно непересекающихся кругов.

28. Доказать, что множество всех точек конечномерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, все координаты которых рациональны, счетно.

29. Доказать, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек плоскости.

30. Доказать, что все области на плоскости равномощны.

31. Доказать, что произвольный набор попарно непересекающихся интервалов на прямой не более чем счетен.

32. Доказать, что множество периодических дробей счетно.

33. Доказать, что любое множество непересекающихся букв Г на плоскости может иметь любую мощность.

34. Какую мощность имеют числа вида $\frac{\sqrt[k]{n}}{m^2}$, k, n, $m \in \mathbf{N}$?

35. Какую мощность имеет множество всех иррациональных чисел?

36. Доказать, что множество всех конечных последовательностей натуральных чисел счетно.

37. Доказать, что множество многочленов от двух переменных с целыми коэффициентами счетно.

38. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты?

39. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества E на прямой больше единицы, то множество E не более чем счетно.

40. На плоскости задано множество E такое, что расстояние между любыми двумя точками этого множества больше единицы. Доказать, что множество E не более чем счетно.

41. На плоскости построено некоторое множество попарно непересекающихся оружностей. Какой может быть мощность этого множества?

42. Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна эквивалентность замкнутого квадрата и открытого круга.

43. Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна эквивалентность плоскости и замкнутого квадрата на плоскости.

44. Какова мощность множества комплексных чисел $z = x + i\,y$ с рациональной действительной частью x и иррациональной мнимой частью y?

45. Какова мощность множества параллельных прямых на плоскости?

46. Доказать, что любое множество непересекающихся восьмёрок на плоскости не более чем счетно. (Восьмерка – объединение двух касающихся окружностей любых размеров).

47. Какова мощность множества всех трансцендентных (т.е. не алгебраических) чисел?

48. Какова мощность множества все матриц, элементами которых являются рациональные числа?

49. Пусть $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, а P – множество простых чисел. Какова мощность множеств: $\mathbf{N} \times \mathrm{P}$; $(\mathbf{N} \setminus \mathrm{P}) \times \mathrm{P}$; $(\mathrm{P} \setminus \mathbf{N}) \times \mathrm{P}$?

50. Можно ли сказать, что если $A = B$, то $A \sim B$, и, наоборот, можно ли сказать, что если $A \sim B$, то $A = B$? Приведите примеры.

Задача 6. Алгебраические структуры

В задачах 1-8 определить какие из следующих операций являются бинарными алгебраическими операциями на множестве $\mathbf{R}^{+}=\{x\in\mathbf{R}:\ x>0\}$, какие из них ассоциативны, коммутативны?

1. $a*b=\dfrac{a+b}{2}$.

2. $a*b=a+b-1$.

3. $a*b=a\,b^{2}$.

4. $a*b=a^{b}$.

5. $a*b=\sqrt{a\,b}$.

6. $a*b=\max\{a,b\}$.

7. $a*b=\log_{a}b$.

8. $a*b=|a-b|$.

В задачах 9-13 показать, что множество $\mathbf{N}$ с операцией $\circ$ является полугруппой:

9. $a\circ b=\textit{НОД}(a,b)$.

10. $a\circ b=\textit{НОК}(a,b)$.

11. $a\circ b=\min\{a,b\}$.

12. $a\circ b=a$.

Какие из следующих подмножеств являются полугруппами относительно операции умножения:

13. $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\square,\ a^{2}+b^{2}\neq 0\}$.

14. $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbf{Q},\ a^{2}+b^{2}\neq 0\}$.

15. $\{2^{n}:\ n\in\square\}$.

16. $\left\{z\in\mathbf{C}:\ |z|<\dfrac{1}{2}\right\}$.

В задачах 17-25 определить образуют ли заданные множества чисел группу по сложению и умножению.

17. Комплексные числа, отличные от нуля.

18. Комплексные числа с модулем равным 1.

19. Комплексные числа с модулем больше 1.

20. Числа 1; -1; i ; $-i$.

21. Числа вида $a+ib$, где a и b – рациональные числа, кроме числа 0.

22. Числа 1 и -1.

23. Положительные иррациональные числа.

24. Все целые степени числа четыре.

25. Множество целых чисел $\{1, 2, ..., p-1\}$ при сложении и умножении по модулю p .

26. Показать, что множество векторов в $\mathbf{R}^3$ с операцией сложения векторов образует группу.

27. Найти подгруппу $\langle\{4, 6\}\rangle$, порожденную числами 4 и 6, аддитивной группы целых чисел.

28. Найти подгруппу $\langle\{1/2, 1/4, 1/8, ...\}\rangle$ аддитивной группы рациональных чисел.

29. Найти подгруппу $\langle\{1/2, 1/3, 1/4, ...\}\rangle$ мультипликативной группы действительных чисел, отличных от нуля.

30. Показать, что множество квадратных матриц n-го порядка, в каждой строке и каждом столбце которой стоит число $+1$ или -1, а остальные элементы равны нулю, образует мультипликативную группу.

31. Показать, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & ... & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{11}\, a_{22}\, ...\, a_{nn} \neq 0)$$

образуют подгруппу группы $GL(n, \mathbf{R})$.

32. Показать, что треугольные матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ образуют подгруппу группы $GL(n, \mathbf{R})$.

33. Матрицы вида $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{pmatrix}$, строки которой состоят из одних и тех же элементов $c_i \in \mathbf{R}$, а каждая следующая строка получается из предыдущей сдвигом на один элемент, называются циклическими. Показать, что невырожденные циклические матрицы порядка n образуют абелевую группу относительно матричного умножения.

34. Показать, что аффинные преобразования плоскости $x' = \alpha x + \beta y + a,$ $y' = \gamma x + \delta y + b$ при $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ образуют группу.

35. Показать, что все сдвиги плоскости $x' = x + a, \quad y' = y + b$ образуют группу (подгруппу аффинных преобразований плоскости из задачи 34).

36. Преобразование f евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$ называется движением, если оно сохраняет расстояние между любыми двумя точками плоскости. В декартовых координатах любое движение может быть записано в виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Показать, что множество всех движений плоскости образует группу.

37. Показать, что подмножество всех движений плоскости, оставляющих на месте начало координат, образует подгруппу группы движений плоскости (см. задачу 36).

38. Пусть $G = (\mathbb{Z}; +)$ – аддитивная группа целых чисел, H – подгруппа чисел, кратных числу 5. Найти фактор - группу G/H.

39. Показать, что множество всех преобразований Мебиуса $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ a, b, c, z – комплексные числа, $ad - bc \neq 0,$ в комплексной плоскости образует группу.

40. Показать, что множество всех преобразований $x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ a, b, c, d – действительные числа, $ad - bc = 1$, образует подгруппу группы из задачи 39.

41. Показать, что множество вращений правильного n - угольника вокруг его центра на углы $\dfrac{360^\circ}{n}k,$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, образует группу (группа симметрий правильного n-угольника).

42. Пусть G – множество чисел $1, -1, i, -i$ с умножением в качестве групповой операции, а G' – множество матриц E, A, B, C с матричным умножением в качестве групповой операции

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Является ли отображение $\varphi: 1 \to E, \;\; i \to A, \;\; -1 \to C, \;\; -i \to B$ изоморфизмом G на G'?

43. Пусть G – множество чисел $1, -1, i, -i$ с умножением в качестве групповой операции, а G' – множество матриц E, A, B, C с матричным умножением в качестве групповой операции

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что отображение $\psi: 1 \to E, \;\; i \to C, \;\; -1 \to B, \;\; -i \to A$ – изоморфизм G на G'.

44. Пусть G – группа комплексных чисел z, таких, что $|z| = 1$ с умножением в качестве групповой операции. Показать, что отображение

$$e^{i\varphi} \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом группы G на группу вращений $SO(2)$.

45. Пусть $G = GL(n, \mathbf{C})$ – группа невырожденных квадратных матриц порядка n с операцией матричного умножения. Показать, что отображение $A \to \det A$ является гомоморфизмом группы G на группу отличных от нуля комплексных чисел с операцией умножения, но не изоморфизмом.

46. Пусть $\{E, A, B, C\}$ – множество матриц из задачи 42 с операцией матричного умножения в качестве групповой операции. Показать, что отображение $\varphi: E \to E, \;\; A \to C, \;\; B \to B, \;\; C \to A$ является автоморфизмом.

47. Показать, что множество $\mathrm{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ функций, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$, с операцией композиции является группой.

48. Показать, что множество $\mathrm{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ функций, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -\dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $f_4(x) = -\dfrac{x+1}{x-1}$, с операцией композиции является группой.

49. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{Q}$, $a^2 + b^2 > 0$, образует мультипликативную группу.

50. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{Q}$, $a^2 + b^2 > 0$, образует мультипликативную группу.

51. Показать, что числа $a + ib$, где a и b – рациональные числа, образуют тело.

52. Показать, что числа $a + \sqrt{2}\,b$, где a и b – рациональные числа, образуют тело.

53. Показать, что следующие таблицы описывают поле:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

54. Показать, что $\left(\mathbb{Z}_4; +, *\right)$ с операциями

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

не является телом.

55. Показать, что множество комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} z & \upsilon \\ -\bar{\upsilon} & \bar{z} \end{pmatrix}$ образует тело (тело кватернионов).

56. Показать, что множество квадратных матриц $\left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$, где $a_{ij} = 0$ при $i > j$, образует кольцо.

57. Доказать, что изоморфизм колец рефлексивен и транзитивен.

58. Показать, что кортежи длины 2 целых чисел с операциями

$$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c,\ b + d \rangle; \qquad \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle ac,\ bd \rangle$$

образуют кольцо, но не поле.

59. Доказать, что числа вида $a+b\sqrt{-5}$ (a и b – целые числа) образуют кольцо.

60. Доказать, что множество $M=\{a,\,b\}$ с двумя элементами и операциями $a+a=b+b=a$, $a+b=b+a=b$, $a\cdot a=a\cdot b=b\cdot a=a$, $b\cdot b=b$ является полем.

61. Доказать, что многочлены с целочисленными коэффициентами образуют область целостности.

62. Доказать, что многочлены с комплексными коэффициентами образуют кольцо.

63. Доказать, что подмножество диагональных матриц $\left\|a_{i\,j}\right\|$ с $a_{i\,j}=0$ при $i\neq j$ множества $Mat_n(\mathbf{R})$ является кольцом.

64. Доказать, что подмножество треугольных матриц $\left\|c_{i\,j}\right\|$ с $c_{i\,j}=0$ при $i<j$ множества $Mat_n(\mathbf{C})$ является кольцом.

65. Показать, что множество числовых пар $\langle a,b\rangle$, где $a,b\in\mathbf{R}$, со сложением и умножением, определенными формулами $\langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle=\langle a+c,\ b+d\rangle$, $\langle a,b\rangle\cdot\langle c,d\rangle=\langle ac,\ bd\rangle$ образует коммутативное кольцо с единицей $\langle 1,1\rangle$ и делителями нуля.

66. На множестве троек вещественных чисел определены операции сложения и умножения

$$\langle a,b,x\rangle+\langle c,d,y\rangle=\langle a+c,\ b+d,\ x+y\rangle,\ \ \langle a,b,x\rangle\cdot\langle c,d,y\rangle=\langle ac,bd,\,xy\rangle.$$

Доказать, что при этом получается некоммутативное кольцо.

67. На множестве пар комплексных чисел определены операции сложения и умножения $\langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle=\langle a+c,\ b+d\rangle$, $\langle a,b\rangle\cdot\langle c,d\rangle=\left\langle ac-b\bar{d},\ \ ad-b\bar{c}\right\rangle$.

Доказать, что при этом получается не коммутативное тело ($\bar{d}$ и $\bar{c}$ означают числа, комплексно сопряженные к d и c).

68. Доказать, что множество аналитических в начале координат функций комплексной переменной является кольцом.

69. Доказать, что множество рациональных функций $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ с вещественными коэффициентами образует поле.

70. Доказать, что множество рациональных функций $P_n(\sin x,\ \cos x)$ от синуса и косинуса с вещественными коэффициентами образует поле.

71. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения и умножения является кольцом. Коммутативно ли это кольцо? Если это кольцо содержит единицу, то найти обратимые элементы.

72. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in 3\mathbb{Z}$, с обычными операциями сложения и умножения является кольцом. Коммутативно ли это кольцо? Если это кольцо содержит единицу, то найти обратимые элементы.

73. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{3b}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$, где a и b целые числа одинаковой четности, с обычными операциями сложения и умножения является кольцом. Коммутативно ли это кольцо? Если это кольцо содержит единицу, то найти обратимые элементы.

74. Доказать, что множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ с операциями

$$\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + a_2,\ b_1 + b_2 \rangle; \quad \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 a_2 - 3b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \rangle$$

является коммутативным кольцом с единицей. Указать в этом кольце обратимые элементы.

75. Доказать, что множество чисел $\dfrac{a + i\sqrt{3}\,b}{2}$, где a и b целые числа одинаковой четности, с обычными операциями сложения и умножения является кольцом. Показать, что это кольцо с единицей и найти обратимые элементы.

Задача 7. Основные понятия по теории графов

1. Нарисовать все кубические графы с не более чем 8 вершинами.

2. Сколько ребер содержит полный трехдольный граф, если $|V_1| = 4$; $|V_2| = 5$; $|V_3| = 6$, где V_1, V_2, V_3 – множество вершин его долей?

3. Найти число ребер в дополнении к простому циклу на 10 вершинах.

4. Может ли регулярный двудольный граф степени больше 1 иметь мосты?

5. Можно ли построить граф, в котором число вершин четной степени нечетно?

6. Нарисуйте все порожденные подграфы простого цикла C_5.

7. Нарисуйте все связные подграфы простой цепи P_7.

8. Какая из цепей P_9 или P_{10} является порожденным подграфом в простом цикле C_{10}?

9. Каково количество ребер в 4-регулярном графе на 10 вершинах?

10. Существует ли граф порядка 5, у которого степени вершин равны: $1, 2, 3, 4, 5$?

11. Нарисуйте граф на 7 вершинах, в котором одна вершина имеет степень 3, а остальные вершины имеют степени 2 или 4.

12. В полном графе 18 вершин. Сколько в нем ребер, инцидентных одной вершине?

13. Граф имеет 9 вершин и 8 ребер. Сколько ребер имеет дополнение графа?

14. Из полного графа на 20 вершинах удалили несколько вершин. В оставшемся подграфе стало 66 ребер. Сколько удалено вершин и ребер?

15. Что можно сказать: a) о соединение двух полных графов; b) о дополнении соединения двух полных графов; c) о дополнении полного двудольного графа?

16. Существует ли цикл в однородном графе, содержащем 33 нечетных вершины?

17. В полном двудольном графе 143 ребра. Определить $|V_1|$ и $|V_2|$, если $|V_1|>1$ и $|V_2|>1$.

18. В двудольном графе $|V_1|=18$, $|V_2|=10$, число ребер равно 18. Найти число ребер дополнения до полного двудольного графа.

19. Доказать, что в непустом двудольном регулярном графе доли содержат равное число вершин.

20. Привести примеры (когда это возможно): a) двудольного регулярного графа; b) кубического графа порядка 9; c) платонова двудольного графа; d) связных графов, являющихся регулярными графами степени 4.

21. Найти все самодополнительные графы с четыремя и пятью вершинами.

22. В графе Петерсена найти: a) маршрут длины четыре; b) циклы длины пять, шесть, восемь и девять; c) разрезы, содержащие три, четыре и пять ребер.

23. Найти диаметры, радиусы и центры графов: a) K_n; b) $K_{n,m}$; c) C_n; d) W_n.

24. Найти диаметр, радиус и центр графа Петерсена и всех платоновых графов.

25. ***Обхватом*** графа называется длина его кратчайшего цикла. Найти обхваты графов: a) K_n; b) $K_{n,m}$; c) C_n; d) W_n; e) платоновых графов; f) графа Петерсена.

26. Найти дополнения к графам, соответствующим тетраэдру, кубу и октаэдру.

27. Найти: 1) $C_4 + E_2$; 2) $K_n + K_m$; 3) $\overline{K_{n,m}}$.

28. Вычислите эксцентриситеты вершин простой цепи с 7 вершинами.

29. Могут ли диаметр и радиус графа совпадать?

30. Сколько вершин содержит центр простого цикла на 13 вершинах, на 17 вершинах?

31. Сколько вершин содержит центр полного графа на 19 вершинах?

32. Сколько вершин содержит центр простой цепи на 13 вершинах, на 18 вершинах?

33. Сколько вершин содержит центр звезды на 13 вершинах, на 32 вершинах?

34. Сколько вершин содержит центр полного двудольного графа с долями из 6 и 8 вершин, с долями из 7 и 9 вершин?

35. Сколько мостов имеет дерево с m ребрами?

36. Чему равна сумма числа ребер n - вершинного графа и числа ребер его дополнения?

37. Найти матрицы смежности графов K_n, E_n, C_n.

38. Чему равна сумма элементов матрицы смежности неориентированного графа?

39. Чему равна сумма элементов матрицы инцидентности ориентированного графа?

40. Построить матрицы смежности для графов K_4 и $K_{3,2}$.

41. Какова связь между матрицами смежности простого графа и его дополнения.

42. Пусть G_n – неориентируемый граф, вершины которого пронумерованы натуральными числами $\{1, 2, ..., n\}$, а множество ребер определяется следующим условием: несовпадающие вершины υ_i и υ_j смежны тогда и только тогда, когда числа i и j взаимно просты. Требуется: a) записать матрицу смежности графа G_5, установить является ли этот граф связным; b) изобразить графы G_4 и G_8 и найти их матрицы смежности.

43. Доказать, что каждое дерево является двудольным графом. Какие деревья являются полными двудольными графами?

44. В дереве 20 вершин. Сколькими способами в дерево можно ввести цикл при помощи одного дополнительного ребра?

45. Доказать, что каждое дерево имеет один или два центра.

46. В связном графе 18 вершин. Сколько ребер содержит его остов?

47. В связном графе 20 вершин и 40 ребер. Сколько ребер необходимо удалить, чтобы получить остов?

48. Нарисовать все неизоморфные деревья порядка шесть и семь.

49. Используя матричную теорему Кирхгофа, найти число остовов в полном двудольном графе $K_{4,4}$.

50. Убедиться непосредственно, что существует ровно 125 помеченных деревьев с пятью вершинами.

Задача 8. Изоморфизм графов

Какие из трех указанных графов являются изоморфными, а какие – неизоморфными? Для изоморфных графов указать соответствие вершин, сохраняющее смежность. Для неизоморфных графов пояснить причину этого.

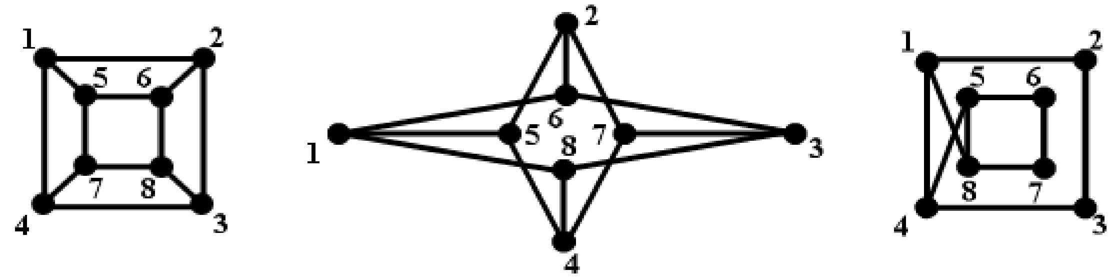


Рис. 1.

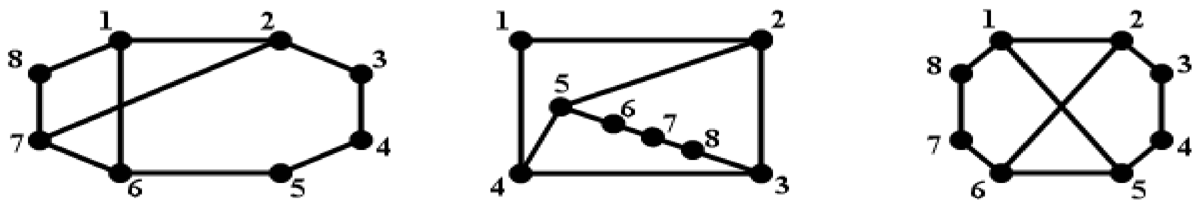


Рис. 2.

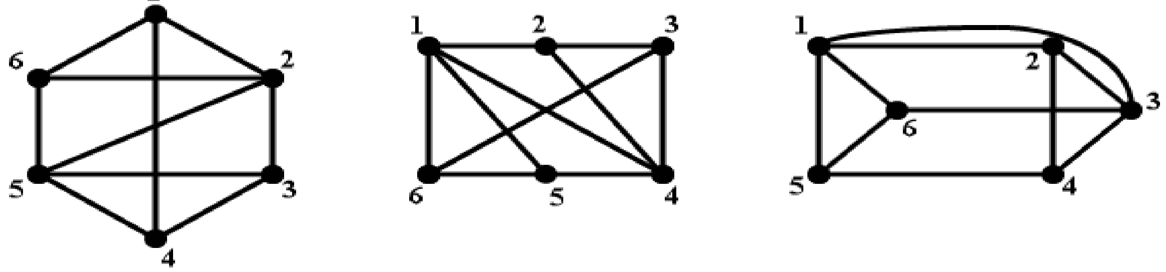


Рис. 3.

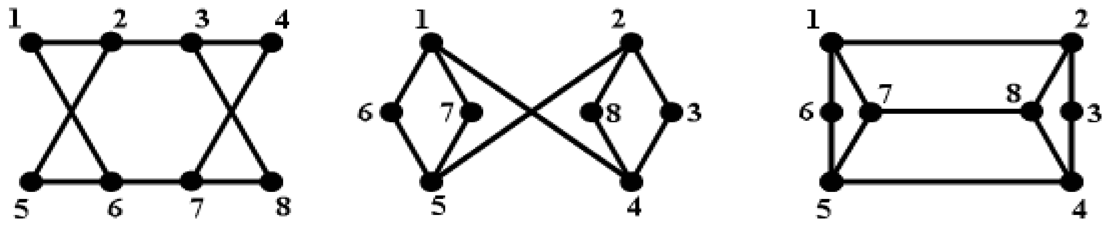


Рис. 4.

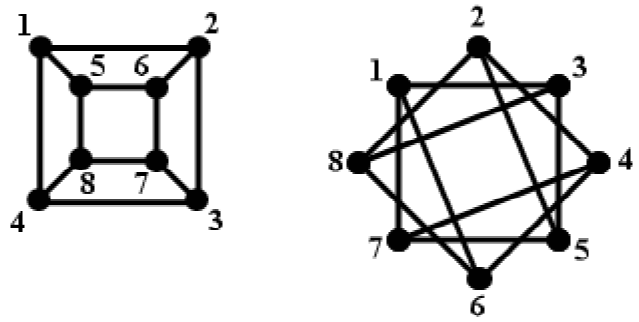


Рис. 5.

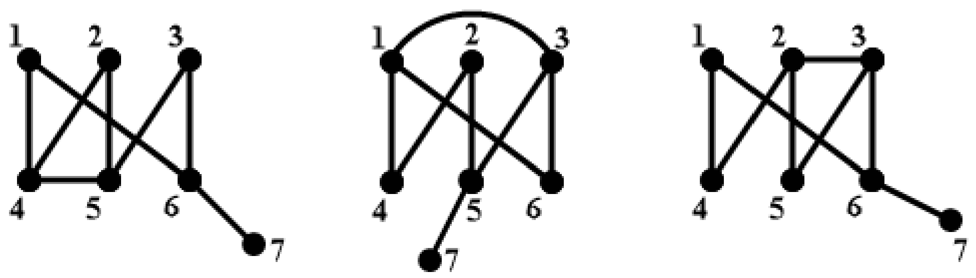


Рис. 6.

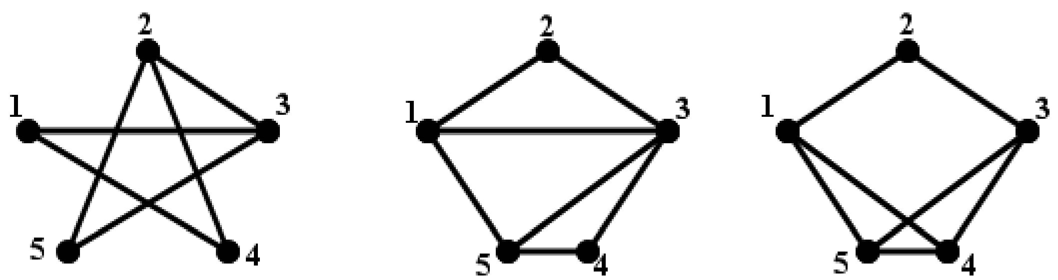


Рис. 7.

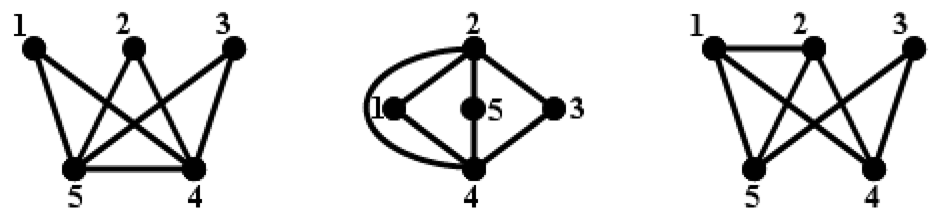


Рис. 8.

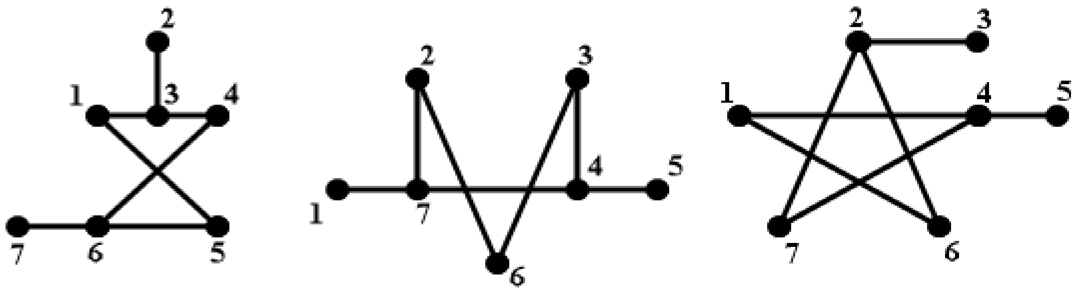


Рис. 9.

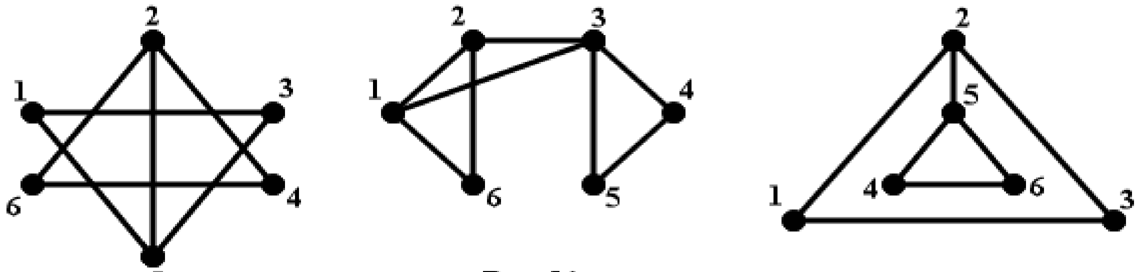


Рис. 10.

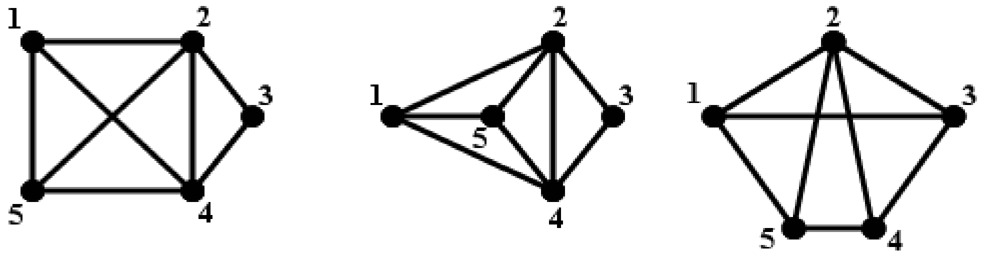


Рис. 11.

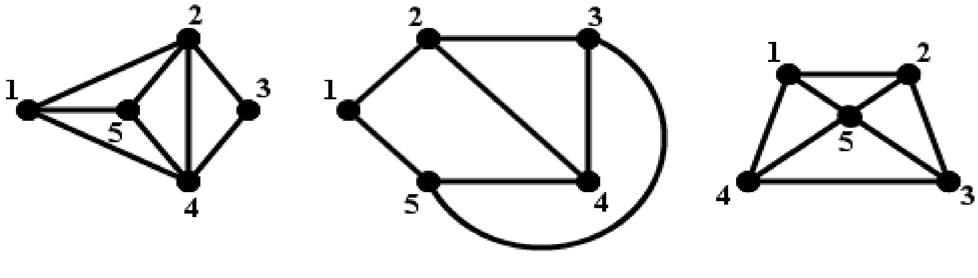


Рис. 12.

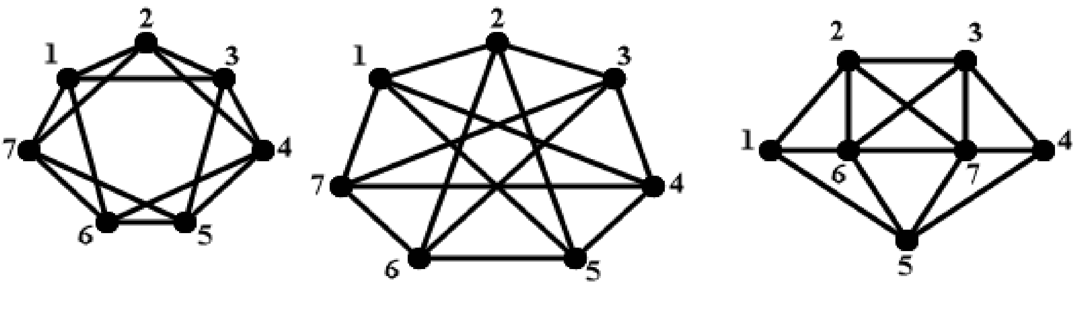


Рис. 13.

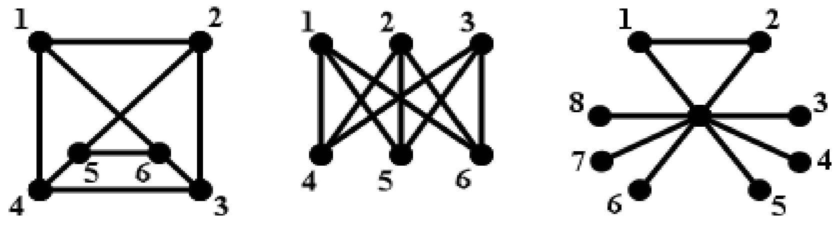


Рис. 14.

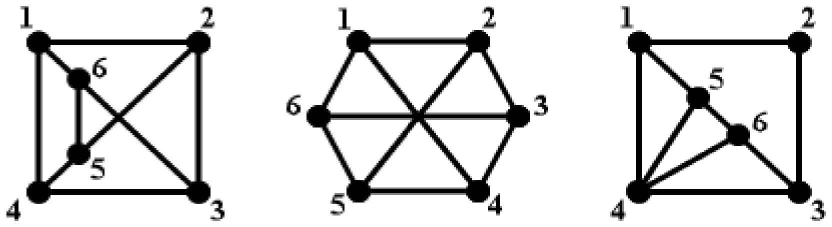


Рис. 15.

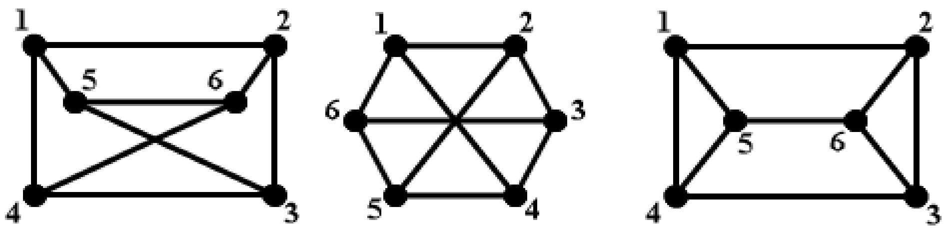


Рис. 16.

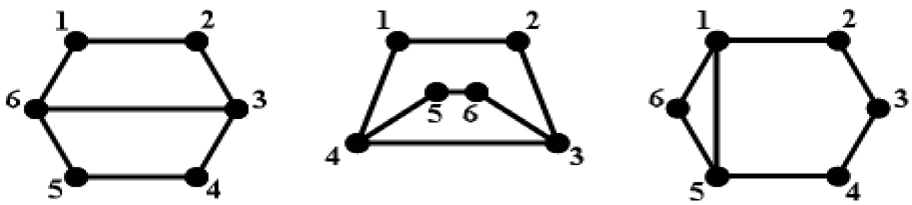


Рис. 17.

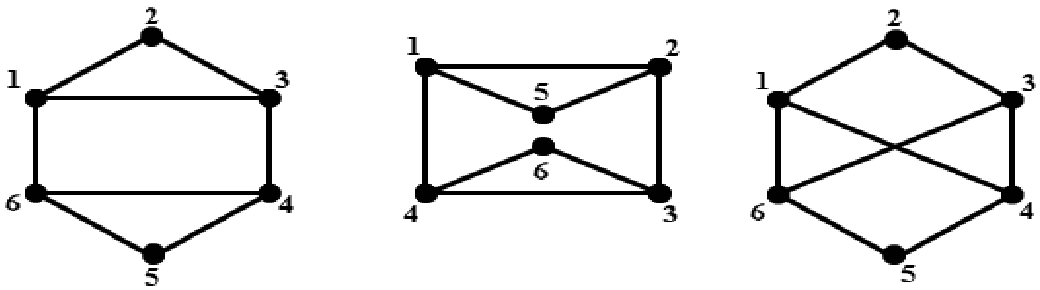


Рис. 18.

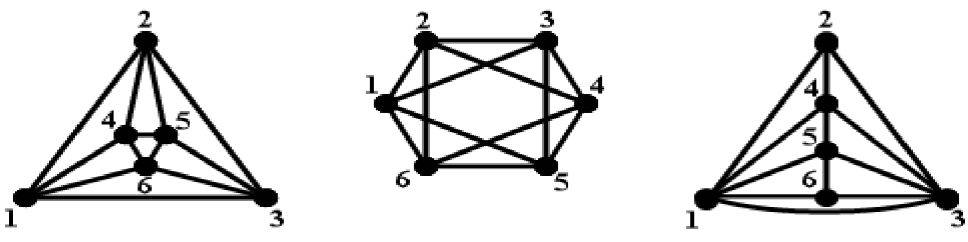


Рис. 19.

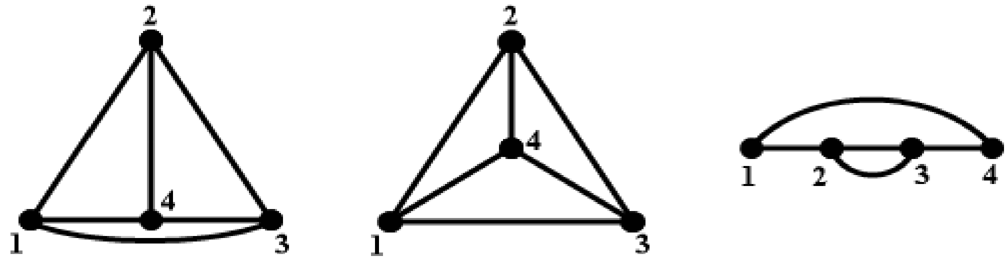


Рис. 20.

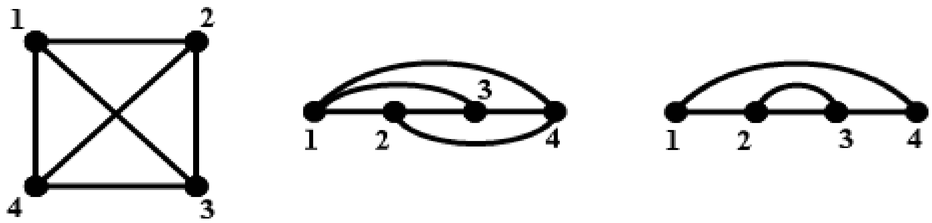


Рис. 21.

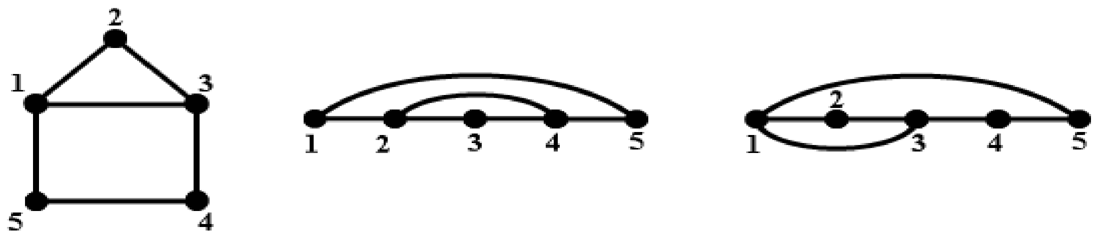


Рис. 22.

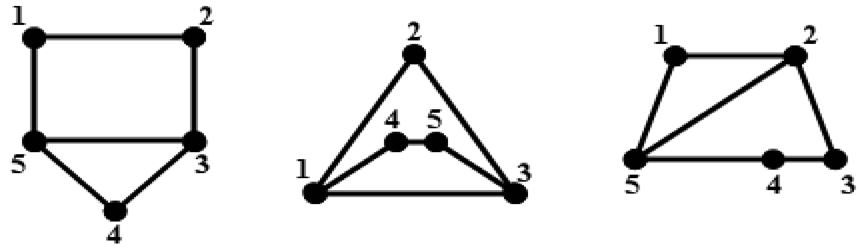


Рис. 23.

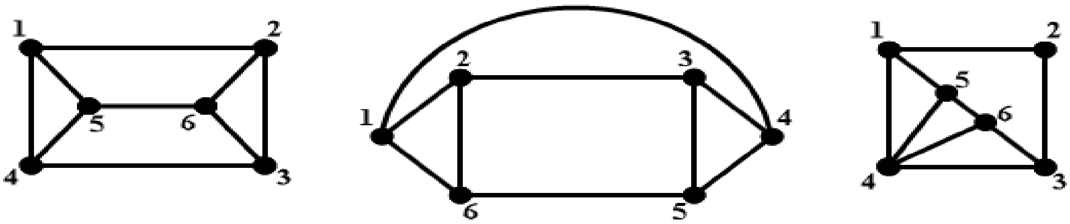


Рис. 24.

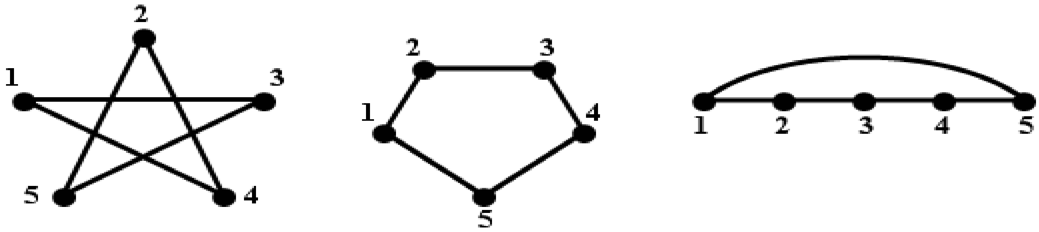


Рис. 25.

Задача 9. Дополнение графа, реберный граф, двойственный граф

Для указанного графа построить его дополнение, реберный граф и геометрически двойственный граф.

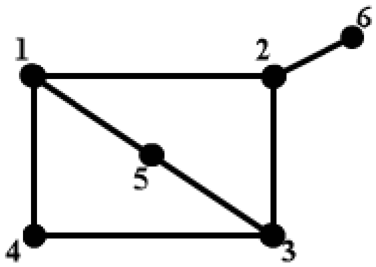


Рис. 1.

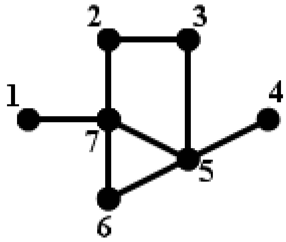


Рис. 2.

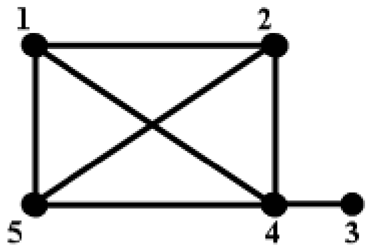


Рис. 3.

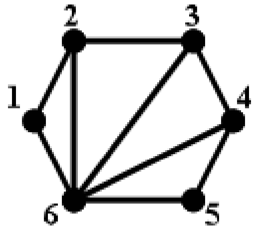


Рис. 4.

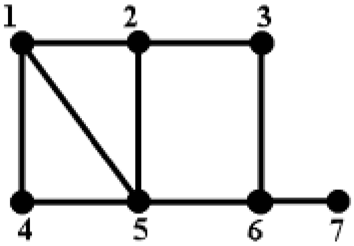


Рис. 5.

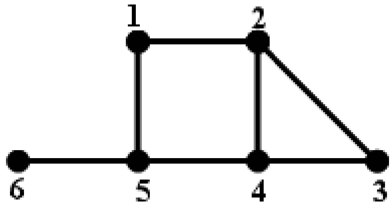


Рис. 6.

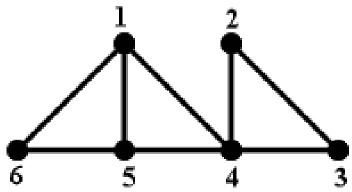


Рис. 7.

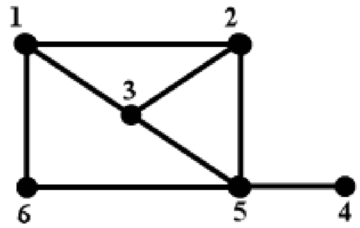


Рис. 8.

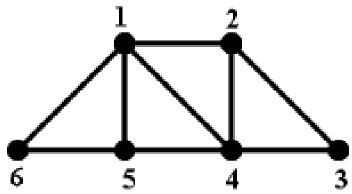


Рис. 9.

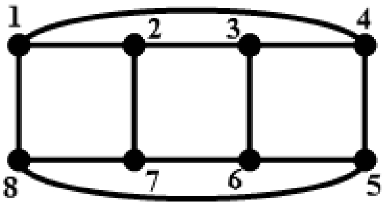


Рис. 10.

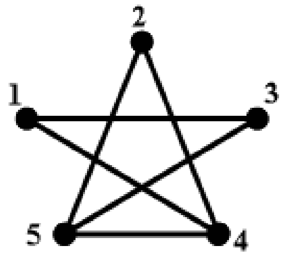


Рис. 11.

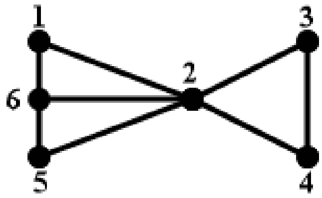


Рис. 12.

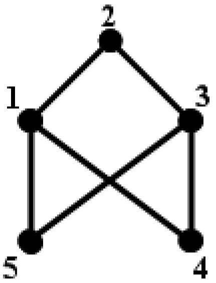


Рис. 13.

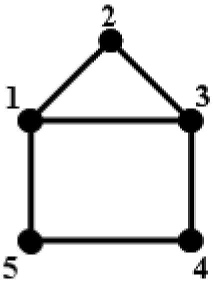


Рис. 14.

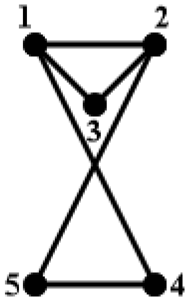


Рис. 15.

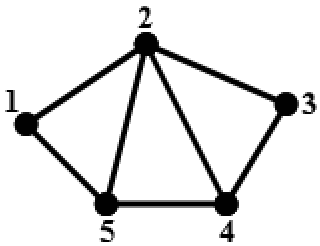


Рис. 16.

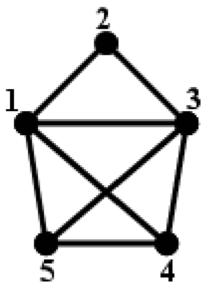


Рис. 17.

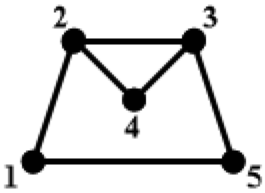


Рис. 18.

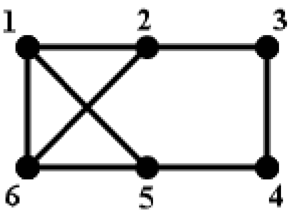


Рис. 19.

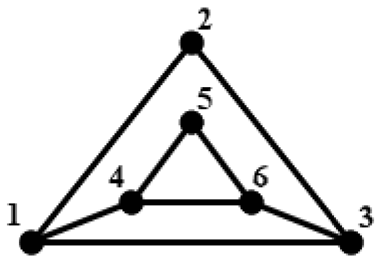


Рис. 20.

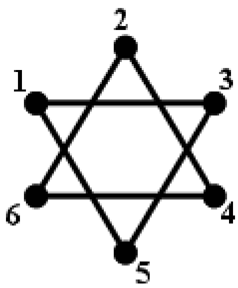


Рис. 21.

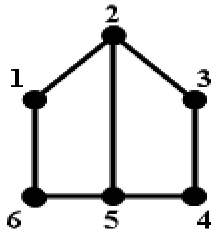


Рис. 22.

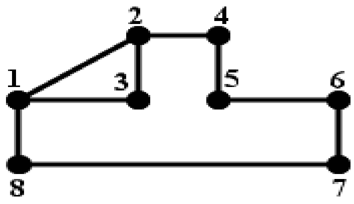


Рис. 23.

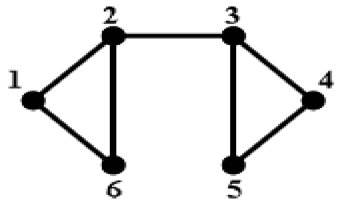


Рис. 24.

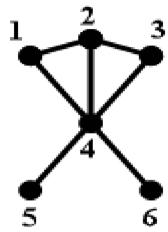


Рис. 25.

Задача 10. Операции над графами

Даны графы G_1 и G_2. Построить графы: $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \times G_2$. Для графа $G_1 \cup G_2$ найти матрицы смежности и инцидентности.

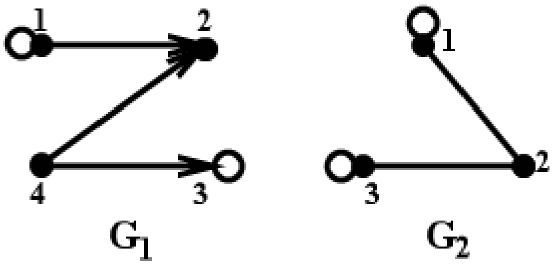


Рис. 1.

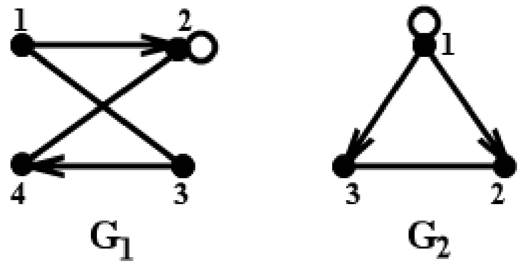


Рис. 2.

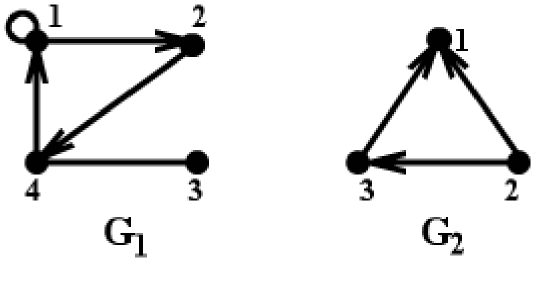


Рис. 3.

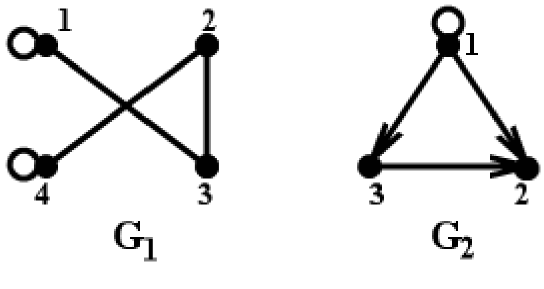


Рис. 4.

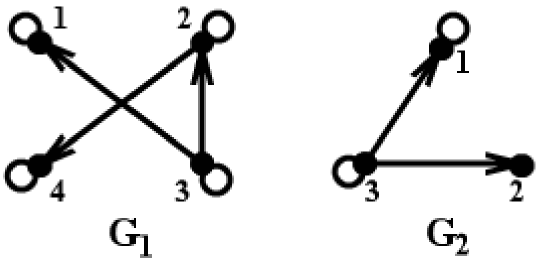


Рис. 5.

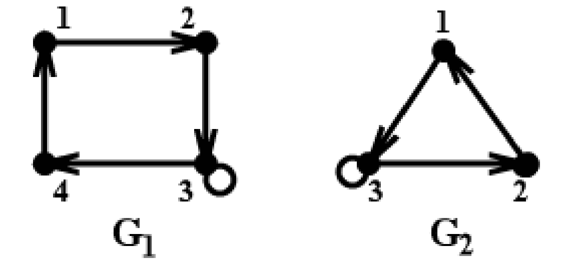


Рис. 6.

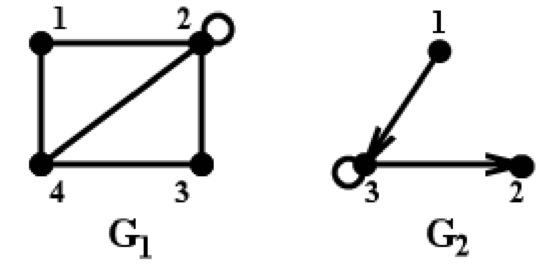


Рис. 7.

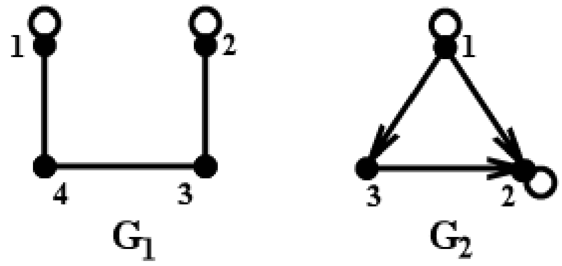


Рис. 8.

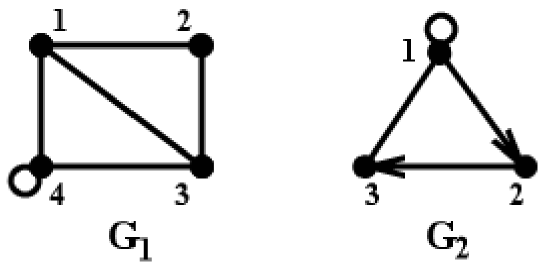


Рис. 9.

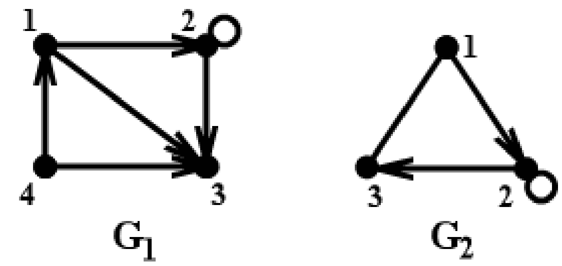


Рис. 10.

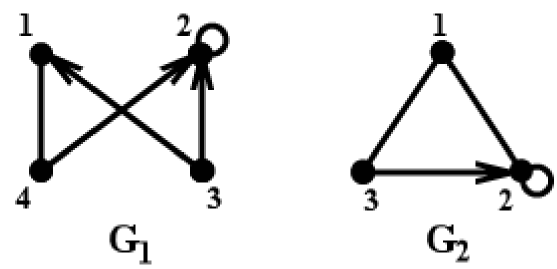


Рис. 11.

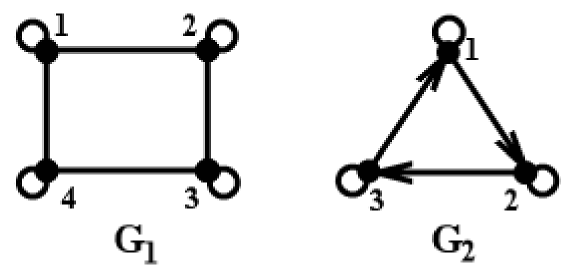


Рис. 12.

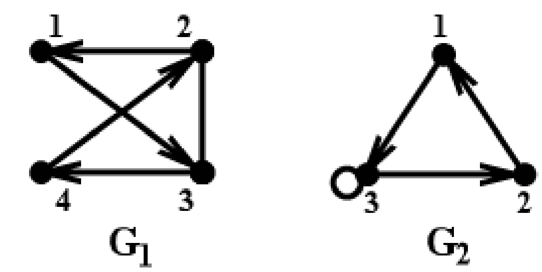


Рис. 13.

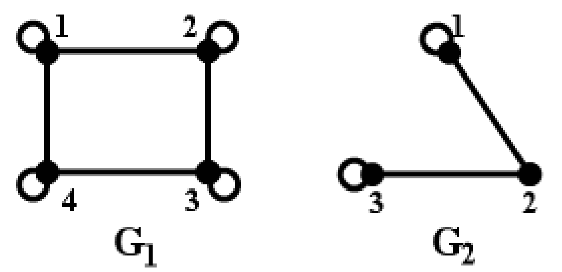


Рис. 14.

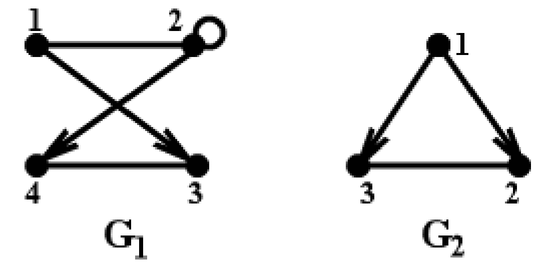


Рис. 15.

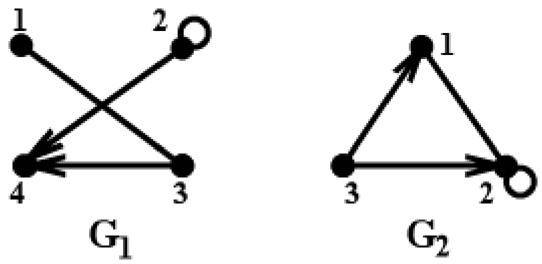


Рис. 16.

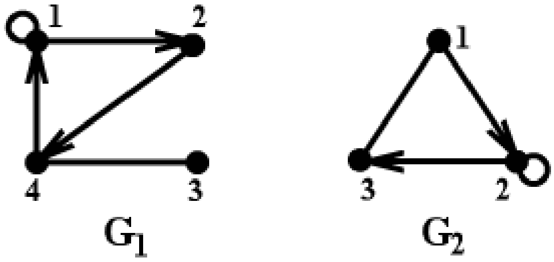


Рис. 17.

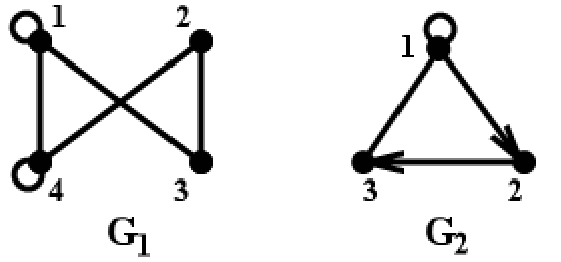


Рис. 18.

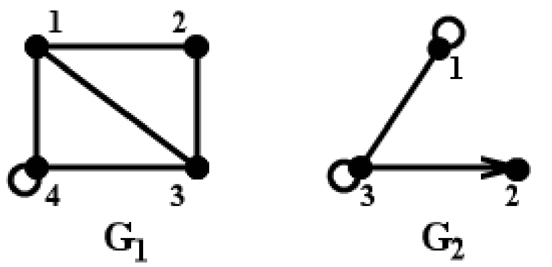


Рис. 19.

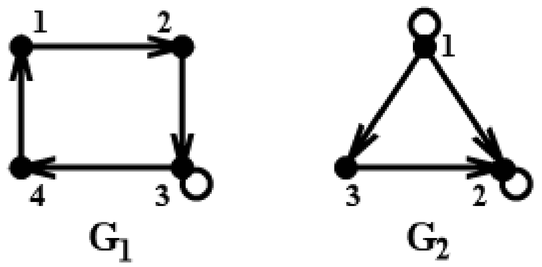


Рис. 20.

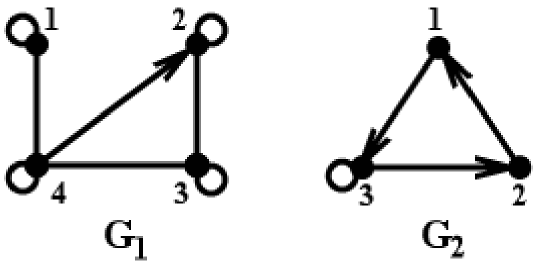


Рис. 21.

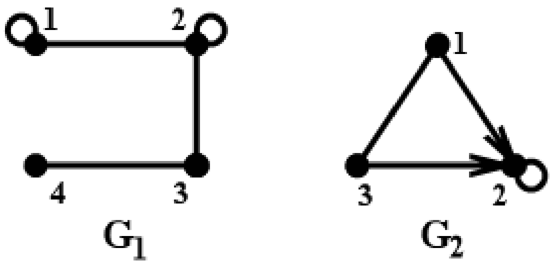


Рис. 22.

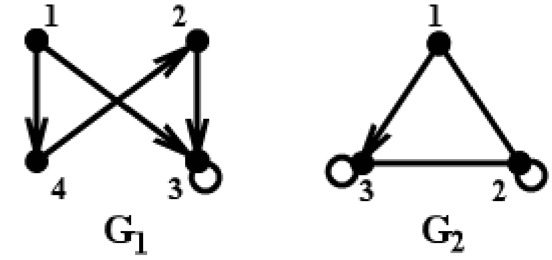


Рис. 23.

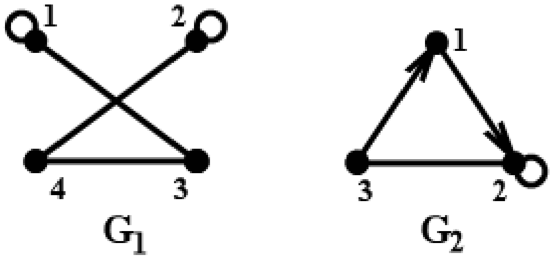


Рис. 24.

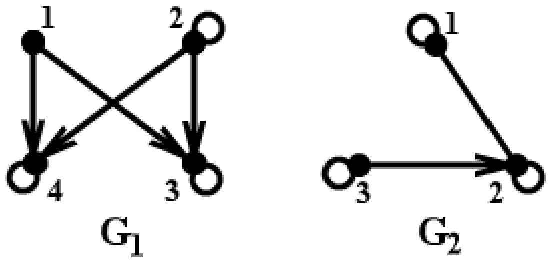


Рис. 25.

Задача 11. Фундаментальные циклы

Найти матрицу фундаментальных циклов, радиус, диаметр и центр графа *G*. Является ли изображенный граф эйлеровым? Является ли изображенный граф планарным?

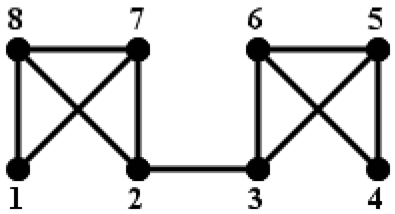


Рис. 1.

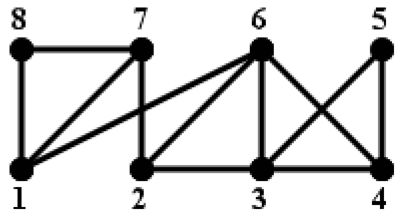


Рис. 2.

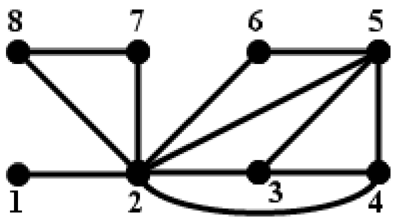


Рис. 3.

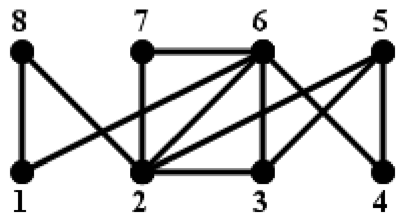


Рис. 4.

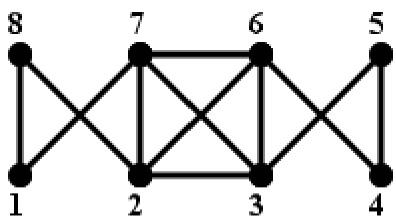


Рис. 5.

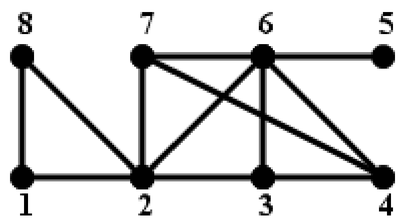


Рис. 6.

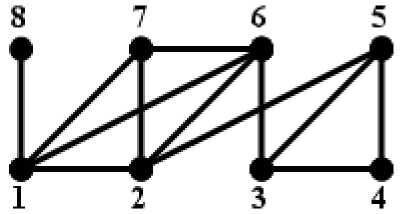


Рис. 7.

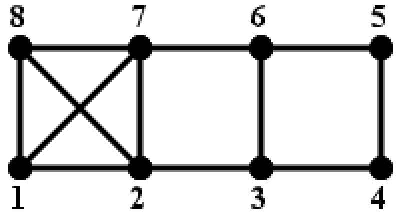


Рис. 8.

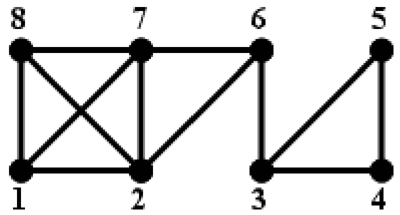


Рис. 9.

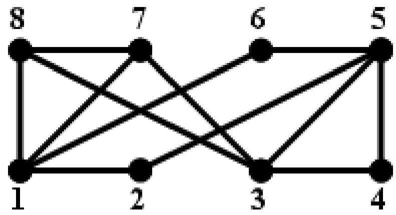


Рис. 10.

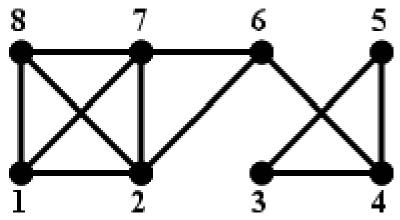


Рис. 11.

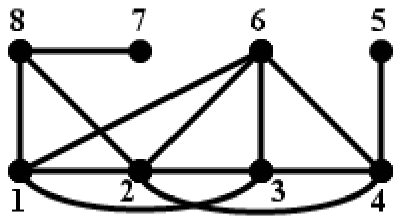


Рис. 12.

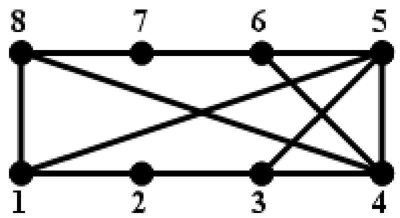


Рис. 13.

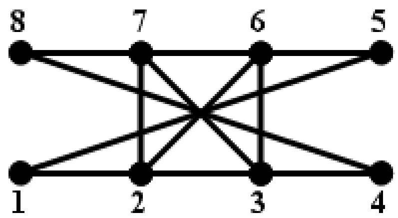


Рис. 14.

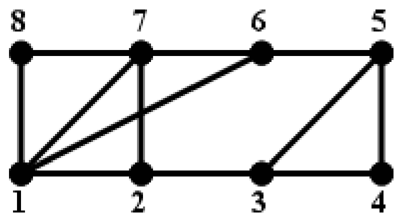


Рис. 15.

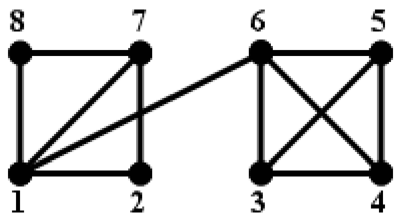


Рис. 16.

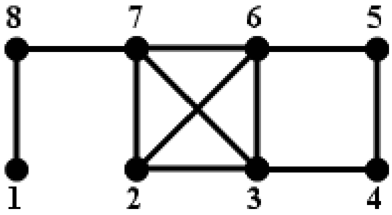


Рис. 17.

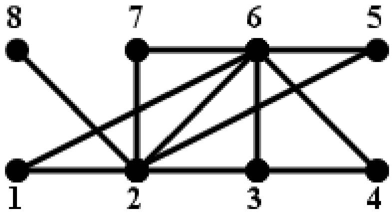


Рис. 18.

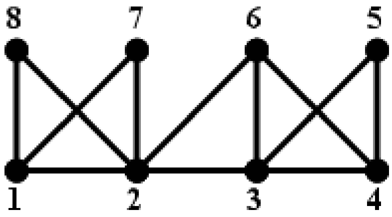


Рис. 19.

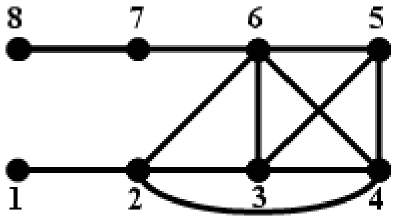


Рис. 20.

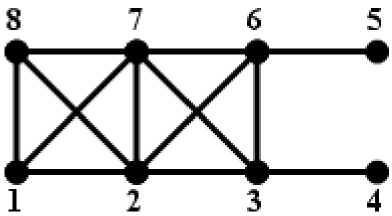


Рис. 21.

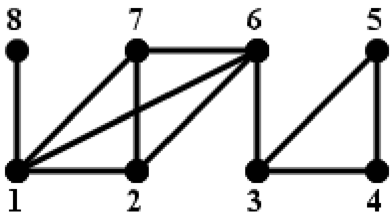


Рис. 22.

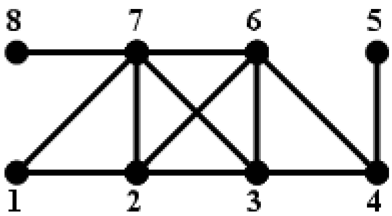


Рис. 23.

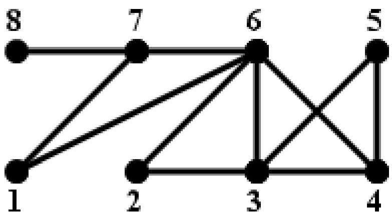


Рис. 24.

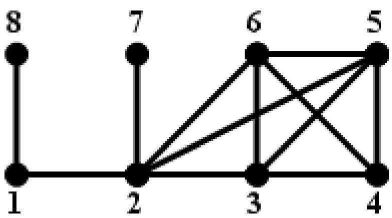


Рис. 25.

Задача 12. Остовное дерево минимального веса

Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов и найти его вес.

№1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	10	∞	5	∞	∞	14
x_2	10	∞	6	2	4	8	∞
x_3	∞	6	∞	3	1	1	∞
x_4	5	2	3	∞	6	∞	3
x_5	∞	4	1	6	∞	5	∞
x_6	∞	8	1	∞	5	∞	2
x_7	14	∞	∞	3	∞	2	∞

№2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	15	12	∞	10	∞
x_2	7	∞	13	9	∞	∞	8
x_3	15	13	∞	7	15	7	∞
x_4	12	9	7	∞	9	∞	11
x_5	∞	∞	15	9	∞	10	∞
x_6	10	∞	7	∞	10	∞	12
x_7	∞	8	∞	11	∞	12	∞

№3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	10	11	∞	14	∞	12
x_2	10	∞	10	9	∞	∞	7
x_3	11	10	∞	12	10	∞	6
x_4	∞	9	12	∞	9	12	∞
x_5	14	∞	10	9	∞	11	12
x_6	∞	∞	∞	12	11	∞	∞
x_7	12	7	6	∞	12	8	∞

№4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	3	5	∞	6	∞	∞
x_2	3	∞	10	6	8	∞	4
x_3	5	10	∞	5	7	∞	9
x_4	∞	6	5	∞	8	7	∞
x_5	6	8	7	8	∞	9	11
x_6	∞	∞	∞	7	9	∞	∞
x_7	∞	4	9	∞	11	∞	∞

№5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	8	∞	10	13	∞	11
x_2	8	∞	7	8	∞	15	∞
x_3	∞	7	∞	∞	19	10	15
x_4	10	8	∞	∞	9	∞	6
x_5	13	∞	19	9	∞	8	∞
x_6	∞	15	10	∞	8	∞	12
x_7	11	∞	15	6	∞	12	∞

№6	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	6	8	∞	∞	7	∞
x_2	6	∞	11	12	9	∞	5
x_3	8	11	∞	7	8	∞	9
x_4	∞	12	7	∞	6	5	10
x_5	∞	9	8	6	∞	8	∞
x_6	7	∞	∞	5	8	∞	7
x_7	∞	5	9	10	∞	7	∞

№7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	3	8	∞	3	6	∞
x_2	3	∞	7	6	∞	∞	4
x_3	8	7	∞	4	6	∞	10
x_4	∞	6	4	∞	5	7	∞
x_5	3	∞	6	5	∞	8	9
x_6	6	∞	∞	7	8	∞	∞
x_7	∞	4	10	∞	9	∞	∞

№8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	9	10	15	∞	∞	11
x_2	9	∞	14	12	∞	8	15
x_3	10	14	∞	10	9	∞	6
x_4	15	12	10	∞	11	12	∞
x_5	∞	∞	9	11	∞	12	11
x_6	∞	8	∞	12	12	∞	∞
x_7	11	15	6	∞	11	∞	∞

№9	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	8	9	∞	∞	∞	6
x_2	8	∞	7	6	9	∞	∞
x_3	9	7	∞	6	10	5	∞
x_4	∞	6	6	∞	8	7	∞
x_5	∞	9	10	8	∞	4	5
x_6	∞	∞	5	7	4	∞	6
x_7	6	∞	∞	∞	5	6	∞

№10	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	8	4	9	∞	6	∞
x_2	8	∞	11	6	10	∞	8
x_3	4	11	∞	7	∞	9	∞
x_4	9	6	7	∞	5	6	∞
x_5	∞	10	∞	5	∞	7	6
x_6	6	∞	9	6	7	∞	8
x_7	∞	8	∞	∞	6	8	∞

№11	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	10	∞	5	∞	6	∞
x_2	10	∞	6	1	4	∞	5
x_3	∞	6	∞	3	1	2	∞
x_4	5	1	3	∞	3	∞	5
x_5	∞	4	1	3	∞	4	2
x_6	6	∞	2	∞	4	∞	∞
x_7	∞	5	∞	5	2	∞	∞

№12	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	5	11	14	∞	∞	8
x_2	5	∞	5	7	∞	∞	8
x_3	11	5	∞	4	8	6	∞
x_4	14	7	4	∞	7	∞	11
x_5	∞	∞	8	7	∞	3	5
x_6	∞	∞	6	∞	3	∞	6
x_7	8	8	∞	11	5	6	∞

№13	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	6	5	∞	8	∞	10
x_2	6	∞	9	7	6	∞	∞
x_3	5	9	∞	8	9	∞	11
x_4	∞	7	8	∞	5	6	∞
x_5	8	6	9	5	∞	7	9
x_6	∞	∞	∞	6	7	∞	∞
x_7	10	∞	11	∞	9	∞	∞

№14	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	5	8	∞	∞	8	∞
x_2	5	∞	7	10	∞	8	∞
x_3	8	7	∞	4	7	7	∞
x_4	∞	10	4	∞	6	9	4
x_5	∞	∞	7	6	∞	3	5
x_6	8	8	7	9	3	∞	6
x_7	∞	∞	∞	4	5	6	∞

№15	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	6	5	∞	10	9	∞
x_2	6	∞	4	5	3	∞	6
x_3	5	4	∞	6	7	∞	8
x_4	∞	5	6	∞	3	6	∞
x_5	10	3	7	3	∞	8	7
x_6	9	∞	∞	6	8	∞	5
x_7	∞	6	8	∞	7	5	∞

№16	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	8	∞	6	∞	4
x_2	7	∞	8	∞	5	10	∞
x_3	8	8	∞	6	∞	3	∞
x_4	∞	∞	6	∞	3	9	4
x_5	6	5	∞	3	∞	8	7
x_6	∞	10	3	9	8	∞	∞
x_7	4	∞	∞	4	7	∞	∞

№17	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	12	10	∞	11	∞	18
x_2	12	∞	13	14	∞	∞	7
x_3	10	13	∞	9	13	∞	16
x_4	∞	14	9	∞	15	14	∞
x_5	11	∞	13	15	∞	15	14
x_6	∞	∞	∞	14	15	∞	∞
x_7	18	7	16	∞	14	∞	∞

№18	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	5	4	11	∞	6	∞
x_2	5	∞	8	9	∞	9	∞
x_3	4	8	∞	∞	5	∞	7
x_4	11	9	∞	∞	∞	5	3
x_5	∞	∞	5	∞	∞	7	8
x_6	6	9	∞	5	7	∞	6
x_7	∞	∞	7	3	8	6	∞

№19	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	8	9	∞	10	∞	∞
x_2	8	∞	6	5	9	∞	7
x_3	9	6	∞	11	7	12	∞
x_4	∞	5	11	∞	3	5	4
x_5	10	9	7	3	∞	4	∞
x_6	∞	∞	12	5	4	∞	9
x_7	∞	7	∞	4	∞	9	∞

№20	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	11	5	8	∞	8	∞
x_2	11	∞	6	13	∞	10	∞
x_3	5	6	∞	∞	7	∞	9
x_4	8	13	∞	∞	3	5	8
x_5	∞	∞	7	3	∞	9	7
x_6	8	10	∞	5	9	∞	∞
x_7	∞	∞	9	8	7	∞	∞

№21	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	∞	11	∞	8	∞	10
x_2	∞	∞	∞	12	5	8	∞
x_3	11	∞	∞	∞	6	4	3
x_4	∞	12	∞	∞	5	∞	7
x_5	8	5	6	5	∞	7	4
x_6	∞	8	4	∞	7	∞	∞
x_7	10	∞	3	7	4	∞	∞

№22	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	∞	∞	10	11	∞	6
x_2	∞	∞	∞	12	10	5	∞
x_3	∞	∞	∞	3	3	∞	8
x_4	10	12	3	∞	6	∞	7
x_5	11	10	3	6	∞	9	∞
x_6	∞	5	∞	∞	9	∞	11
x_7	6	∞	8	7	∞	11	∞

№23	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	∞	12	10	14	∞	∞
x_2	∞	∞	12	∞	5	∞	7
x_3	12	12	∞	7	6	8	∞
x_4	10	∞	7	∞	4	9	9
x_5	14	5	6	4	∞	8	∞
x_6	∞	∞	8	9	8	∞	7
x_7	∞	7	∞	9	∞	7	∞

№24	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	3	8	12	7	∞	16
x_2	3	∞	4	∞	9	∞	∞
x_3	8	4	∞	5	7	11	∞
x_4	12	∞	5	∞	10	6	4
x_5	7	9	7	10	∞	5	∞
x_6	∞	∞	11	6	5	∞	5
x_7	16	∞	∞	4	∞	5	∞

№25	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	∞	7	∞	∞	11	∞
x_2	∞	∞	∞	17	8	15	∞
x_3	7	∞	∞	5	6	∞	10
x_4	∞	17	5	∞	12	5	3
x_5	∞	8	6	12	∞	4	9
x_6	11	15	∞	5	4	∞	∞
x_7	∞	∞	10	3	9	∞	∞

Задача 13. Кратчайшие пути в графе. Алгоритм Дейкстры

По заданной матрице весов графа найти величину минимального пути и сам путь от вершины x_1 до вершины x_6 или x_7 по алгоритму Дейкстры.

№1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	5	10	13	∞	∞
x_2	∞	∞	8	9	13	∞
x_3	∞	∞	∞	5	3	6
x_4	∞	∞	∞	∞	8	10
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	9
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	11	∞	14	15	∞
x_2	∞	∞	13	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	∞	∞	∞	13
x_4	∞	7	11	∞	9	∞
x_5	∞	11	10	∞	∞	14
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	5	8	7	18	∞
x_2	∞	∞	11	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	∞	∞	∞	17
x_4	∞	10	12	∞	6	∞
x_5	∞	7	8	∞	∞	11
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	6	8	11	10	∞
x_2	∞	∞	∞	9	7	15
x_3	∞	8	∞	7	14	11
x_4	∞	∞	∞	∞	6	7
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	9
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	∞	11	15	7	∞	∞
x_2	∞	∞	∞	∞	14	18	∞
x_3	∞	9	∞	13	7	11	22
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	11	16
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	8	23
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	19
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№6	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	5	6	9	∞	∞
x_2	∞	∞	∞	3	∞	14
x_3	∞	3	∞	3	4	16
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	4
x_5	∞	∞	∞	3	∞	8
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	7	9	∞	11	∞
x_2	∞	∞	∞	6	∞	13
x_3	∞	6	∞	5	6	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	7
x_5	∞	4	∞	6	∞	8
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	7	15	∞	14	∞
x_2	∞	∞	7	16	∞	∞
x_3	∞	∞	∞	19	∞	21
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	17
x_5	∞	13	14	15	∞	18
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№9	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	10	12	∞	∞	∞
x_2	∞	∞	11	9	∞	19
x_3	∞	∞	∞	∞	10	∞
x_4	∞	∞	13	∞	11	10
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	6
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№10	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	7	19	20	∞	15	∞
x_2	∞	∞	∞	11	6	∞	∞
x_3	∞	∞	∞	6	9	∞	16
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	8	13
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	5	15
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	14
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№11	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	7	2	∞	13	∞
x_2	∞	∞	∞	∞	6	∞
x_3	∞	2	∞	1	3	11
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	5
x_5	∞	∞	∞	3	∞	5
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№12	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	10	11	6	∞	∞
x_2	∞	∞	13	8	11	17
x_3	∞	∞	∞	5	6	15
x_4	∞	∞	∞	∞	7	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	9
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№13	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	6	∞	9	12	∞
x_2	∞	∞	6	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	∞	∞	∞	6
x_4	∞	4	8	∞	6	14
x_5	∞	7	5	∞	∞	10
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№14	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	4	9	8	∞	∞
x_2	∞	∞	2	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	∞	∞	∞	3
x_4	∞	2	4	∞	6	∞
x_5	∞	2	∞	∞	∞	3
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№15	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	5	∞	10	8	12	∞
x_2	∞	∞	7	∞	4	9	∞
x_3	∞	∞	∞	5	∞	6	11
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	14
x_5	∞	∞	6	∞	∞	13	21
x_6	∞	∞	∞	8	∞	∞	9
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№16	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	6	9	13	12	∞
x_2	∞	∞	5	9	6	∞
x_3	∞	∞	∞	6	∞	15
x_4	∞	∞	∞	∞	8	9
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	8
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№17	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	8	10	∞	∞	∞
x_2	∞	∞	10	9	12	∞
x_3	∞	∞	∞	10	12	7
x_4	∞	∞	∞	∞	9	13
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	11
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№18	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	11	14	∞	∞	∞
x_2	∞	∞	8	10	15	∞
x_3	∞	∞	∞	11	16	20
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	12
x_5	∞	∞	∞	11	∞	14
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№19	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	9	7	13	∞	∞
x_2	∞	∞	∞	∞	15	∞
x_3	∞	5	∞	∞	∞	∞
x_4	∞	6	7	∞	8	10
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	12
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№20	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	∞	9	∞	∞	∞	∞
x_2	∞	∞	∞	11	5	10	∞
x_3	∞	4	∞	3	6	7	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5
x_5	∞	∞	∞	7	∞	5	18
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№21	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	4	8	∞	∞	∞
x_2	∞	∞	∞	3	∞	10
x_3	∞	3	∞	4	3	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	4
x_5	∞	2	∞	5	∞	7
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№22	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	5	4	∞	10	∞
x_2	∞	∞	∞	8	∞	13
x_3	∞	6	∞	5	8	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	8
x_5	∞	∞	∞	4	∞	10
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№23	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	12	10	∞	11	∞
x_2	∞	∞	∞	10	7	15
x_3	∞	8	∞	7	10	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	11
x_5	∞	∞	∞	6	∞	12
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№24	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	15	10	∞	∞	∞
x_2	∞	∞	∞	∞	12	18
x_3	∞	10	∞	9	12	19
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	13
x_5	∞	∞	∞	11	∞	14
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

№25	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	∞	∞	7	12	∞	10	∞
x_2	∞	∞	∞	∞	6	13	∞
x_3	∞	5	∞	4	5	6	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4
x_5	∞	∞	∞	8	∞	5	9
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Задача 14. Задача коммивояжера

Найти гамильтонов контур наименьшей длины.

№1	1	2	3	4	5	6
1	∞	31	15	19	8	55
2	19	∞	22	31	7	35
3	25	43	∞	53	57	16
4	5	50	49	∞	39	9
5	24	24	33	5	∞	14
6	34	26	6	3	36	∞

№2	1	2	3	4	5	6
1	∞	19	25	11	2	35
2	37	∞	26	58	21	43
3	10	50	∞	39	22	3
4	38	39	24	∞	38	45
5	27	9	32	9	∞	2
6	33	48	60	53	1	∞

№3	1	2	3	4	5	6
1	∞	16	13	35	41	52
2	19	∞	29	31	26	18
3	57	51	∞	44	51	7
4	5	40	32	∞	14	16
5	33	41	28	3	∞	53
6	19	54	24	10	41	∞

№4	1	2	3	4	5	6
1	∞	39	45	2	51	33
2	30	∞	20	33	40	35
3	54	16	∞	55	22	56
4	19	36	25	∞	18	43
5	29	8	8	12	∞	25
6	16	47	31	14	8	∞

№5	1	2	3	4	5	6
1	∞	41	27	54	46	5
2	42	∞	11	32	58	21
3	36	5	∞	33	22	33
4	46	24	59	∞	49	59
5	48	58	11	44	∞	47
6	26	50	35	19	27	∞

№6	1	2	3	4	5	6
1	∞	21	40	28	60	52
2	58	∞	11	39	22	56
3	22	12	∞	23	14	19
4	25	47	51	∞	20	54
5	47	43	18	42	∞	52
6	44	49	50	52	29	∞

№7	1	2	3	4	5	6
1	∞	6	56	35	48	29
2	34	∞	46	46	55	26
3	29	31	∞	32	13	42
4	26	34	12	∞	17	7
5	38	35	40	13	∞	47
6	60	25	59	36	31	∞

№8	1	2	3	4	5	6
1	∞	22	26	56	38	60
2	34	∞	12	51	37	27
3	45	33	∞	44	47	37
4	39	7	16	∞	57	8
5	35	56	40	58	∞	27
6	9	20	36	31	18	∞

№9	1	2	3	4	5	6
1	∞	4	39	22	10	47
2	58	∞	56	18	4	35
3	34	29	∞	17	57	18
4	52	4	22	∞	15	37
5	41	44	25	11	∞	32
6	11	6	19	2	58	∞

№10	1	2	3	4	5	6
1	∞	14	40	33	16	51
2	48	∞	34	4	11	24
3	57	35	∞	24	38	52
4	30	50	44	∞	9	31
5	18	42	24	31	∞	30
6	1	38	31	19	32	∞

№11	1	2	3	4	5	6
1	∞	56	48	39	3	40
2	47	∞	50	4	10	49
3	48	50	∞	42	19	16
4	24	44	47	∞	23	33
5	38	17	6	51	∞	26
6	29	59	55	34	18	∞

№12	1	2	3	4	5	6
1	∞	41	60	39	46	10
2	31	∞	59	16	1	51
3	29	51	∞	14	42	50
4	35	12	52	∞	16	26
5	16	39	15	60	∞	57
6	15	30	38	47	36	∞

№13	1	2	3	4	5	6
1	∞	57	27	17	1	49
2	10	∞	17	46	13	48
3	48	2	∞	23	34	50
4	0	45	49	∞	44	14
5	53	39	13	11	∞	5
6	7	57	33	26	46	∞

№14	1	2	3	4	5	6
1	∞	14	17	25	54	37
2	57	∞	43	2	13	34
3	7	24	∞	8	9	7
4	13	28	30	∞	56	18
5	26	44	4	52	∞	52
6	18	5	49	14	12	∞

№15	1	2	3	4	5	6
1	∞	44	60	54	29	39
2	53	∞	46	19	42	6
3	36	7	∞	37	44	3
4	21	4	49	∞	14	26
5	15	12	38	46	∞	24
6	19	6	45	57	11	∞

№16	1	2	3	4	5	6
1	∞	15	43	38	10	45
2	44	∞	18	6	49	40
3	41	42	∞	19	1	48
4	33	44	20	∞	20	21
5	40	17	16	26	∞	15
6	3	4	37	54	36	∞

№17	1	2	3	4	5	6
1	∞	58	56	13	21	54
2	21	∞	58	43	56	14
3	4	46	∞	38	7	22
4	44	56	42	∞	6	60
5	3	34	36	11	∞	17
6	59	47	40	60	13	∞

№18	1	2	3	4	5	6
1	∞	50	33	18	5	44
2	51	∞	19	24	20	32
3	19	23	∞	42	14	25
4	42	53	2	∞	48	5
5	27	28	31	33	∞	1
6	12	37	60	21	21	∞

№19	1	2	3	4	5	6
1	∞	21	34	48	58	35
2	9	∞	14	30	4	12
3	6	7	∞	35	11	34
4	26	37	17	∞	36	52
5	59	15	7	32	∞	47
6	3	17	6	44	59	∞

№20	1	2	3	4	5	6
1	∞	23	38	44	18	32
2	51	∞	17	35	56	47
3	28	37	∞	24	16	21
4	26	49	60	∞	7	46
5	56	6	40	34	∞	31
6	33	20	50	51	30	∞

№21	1	2	3	4	5	6
1	∞	20	28	12	39	32
2	21	∞	15	9	17	27
3	30	25	∞	45	29	47
4	7	52	40	∞	15	1
5	60	46	11	5	∞	34
6	11	45	14	21	30	∞

№22	1	2	3	4	5	6
1	∞	36	51	24	11	46
2	28	∞	17	46	10	20
3	7	41	∞	58	2	35
4	25	60	45	∞	55	59
5	48	20	33	26	∞	38
6	50	27	19	14	52	∞

№23	1	2	3	4	5	6
1	∞	16	15	32	53	55
2	27	∞	34	50	2	31
3	33	39	∞	42	36	39
4	45	22	59	∞	28	26
5	55	49	14	18	∞	12
6	28	14	8	48	35	∞

№24	1	2	3	4	5	6
1	∞	9	37	28	52	53
2	24	∞	25	48	27	48
3	27	45	∞	23	47	58
4	9	30	16	∞	8	60
5	53	54	4	1	∞	46
6	60	12	5	50	35	∞

№25	1	2	3	4	5	6
1	∞	33	41	46	11	21
2	10	∞	26	28	39	43
3	1	57	∞	20	60	28
4	50	25	35	∞	42	7
5	43	44	51	19	∞	34
6	55	22	30	50	53	∞

Задача 15. Эйлеровы и гамильтоновы графы

1. Найти все платоновы эйлеровы графы.

2. Для каких чисел *m*, *n* графы K_n, $K_{m,n}$, $C_{n,}$ W_n будут эйлеровыми?

3. Показать, что все платоновы графы являются гамильтоновыми и найти в каждом из них гамильтоновы циклы.

4. В графе K_{2n+1} найти n гамильтоновых циклов, каждые два из которых не имеют общих ребер, $n = 2, 3$.

5. Может ли шахматный конь побывать на каждой клетке шахматной доски 8×8 ровно один раз и последним ходом возвратиться в исходную позицию? Тот же вопрос для короля и ладьи.

6. Может ли шахматный конь побывать на каждой клетке шахматной доски 7×7 ровно один раз и последним ходом возвратиться в исходную позицию? Тот же вопрос для короля и ладьи.

7. Можно ли ходом шахматного коня обойти всю шахматную доску 8×8 так, чтобы каждый ход встречался один раз (конь может перемещаться с одной клетки на другую любым из двух возможных способов)? Тот же вопрос для короля и ладьи.

8. Можно ли ходом шахматного коня обойти всю шахматную доску 7×7 так, чтобы каждый ход встречался один раз (конь может перемещаться с одной клетки на другую любым из двух возможных способов)? Тот же вопрос для короля и ладьи.

9. Для каких чисел m и n следующие графы являются гамильтоновыми: a) K_n; b) $K_{n,m}$; c) C_n; d) W_n? Опишите гамильтоновы циклы в каждом из тех случаев, когда они существуют.

10. Существуют ли такие числа m и n, при которых граф $K_{m,n}$ является a) эйлеровым; b) полуэйлеровым; c)гамильтоновым; d) полугамильтоновым?

11. Существует ли такое n, при котором граф $K_{n,n}$ является эйлеровым и гамильтоновым?

12. Привести пример графа, являющегося гамильтоновым и являющегося эйлеровым.

13. Привести пример графа, не являющегося гамильтоновым и не являющегося эйлеровым.

14. Привести пример эйлерова графа, не являющегося гамильтоновым, и гамильтонова графа, не являющегося эйлеровым.

15. Пусть наименьшая степень вершин графа больше 2. Может ли некоторый цикл быть одновременно гамильтоновым и эйлеровым?

16. Доказать, что граф Петерсена не является гамильтоновым. Будет ли он полугамильтоновым?

17. Может ли эйлеров граф иметь мосты?

18. Может ли гамильтонов граф иметь мосты?

19. В полном графе K_n эйлеров цикл содержит 171 ребро. Найти n.

20. Привести контрпример, показывающий, что в формулировке теоремы Дирака условие $\deg \upsilon \geq n/2$ нельзя заменить более слабым условием $\deg \upsilon \geq n/2-1$.

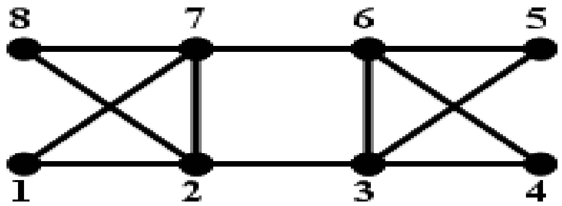
21. Дан кусок проволки длиной 120 см. Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы изготовить каркас куба с ребром 10 см?

22. Разбить квадрат $n \times n$ на n^2 единичных квадратов прямыми, параллельными его сторонам. При каких n такие графы имеют эйлеровы, гамильтоновы, полуэйлеровы, полугамильтоновы циклы и цепи?

23. Являются ли реберные графы графа тетраэдра и графа додекаэдра эйлеровыми графами?

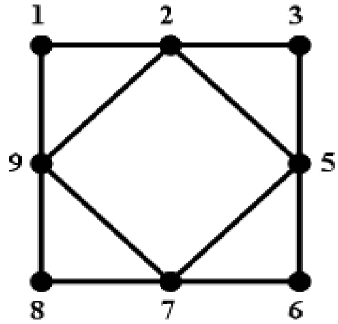
24. Являются ли реберные графы графа куба и графа октаэдра гамильтоновыми графами?

25. Является ли граф, изображенный на рисунке, эйлеровым, гамильтоновым, полуэйлеровым, полугамильтоновым?

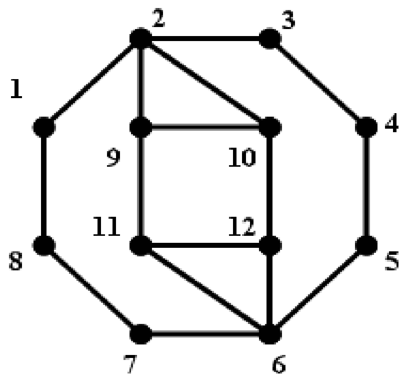


Задача 16. Эйлеровы циклы. Алгоритм Флери

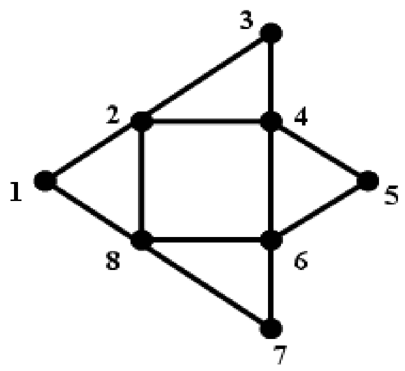
По алгоритму Флёри найти эйлеровы циклы на графах.



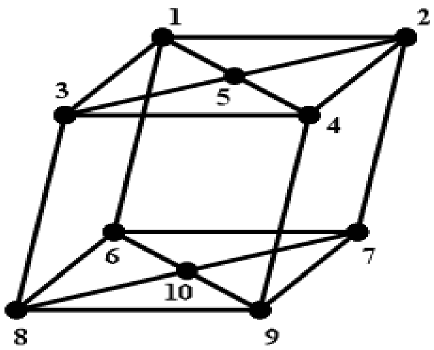
№ 1



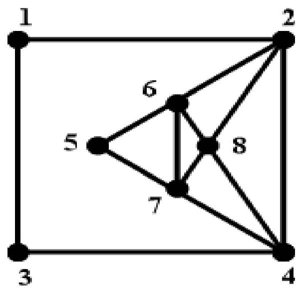
№ 2



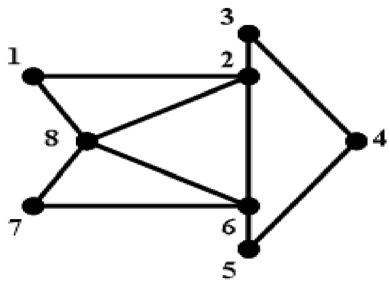
№ 3



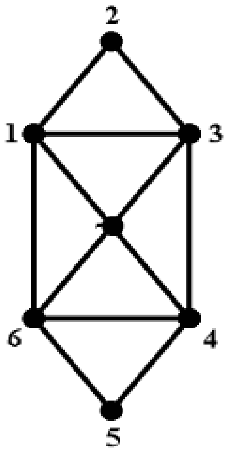
№ 4



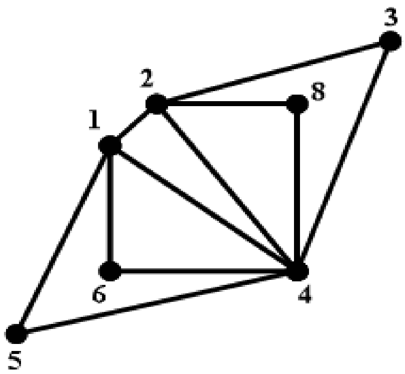
№ 5



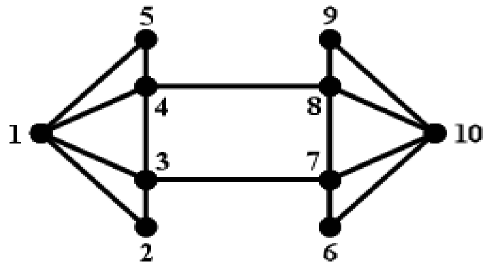
№ 6



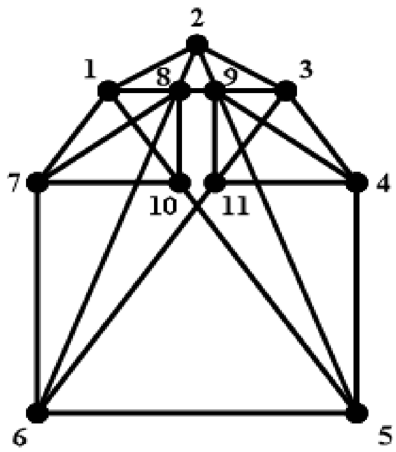
№ 7



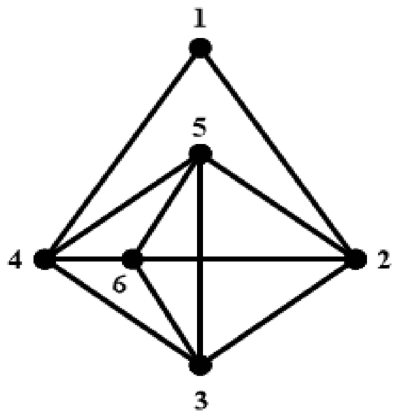
№8



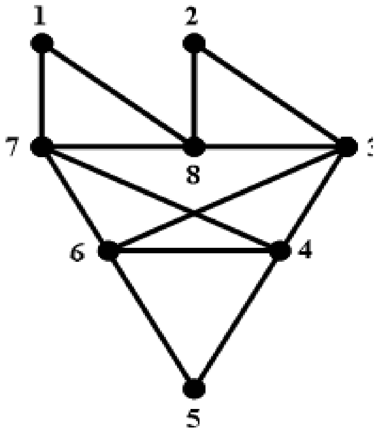
№9



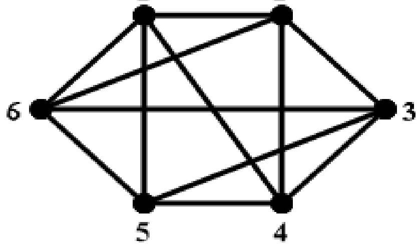
№10



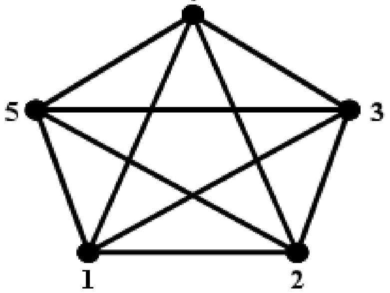
№11



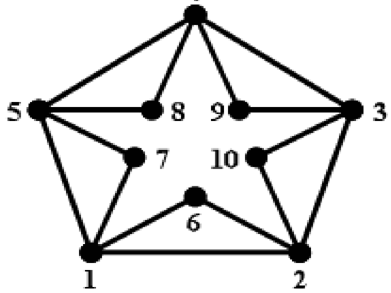
№12



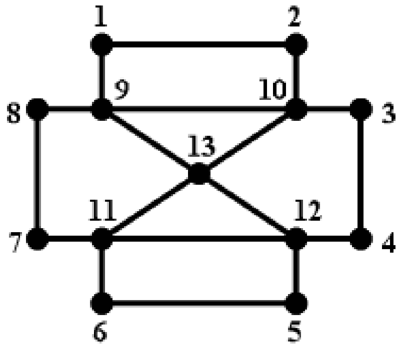
№13



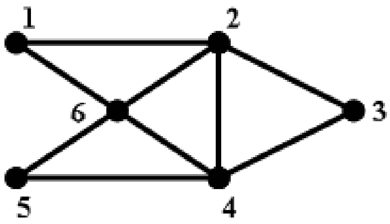
№14



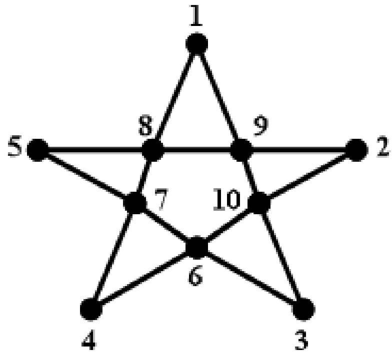
№15



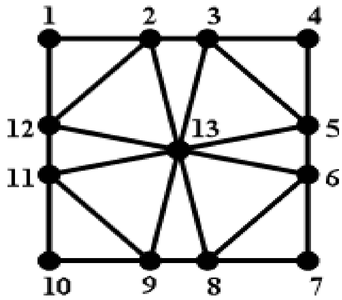
№16



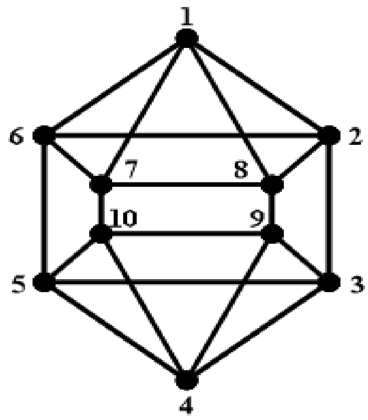
№17



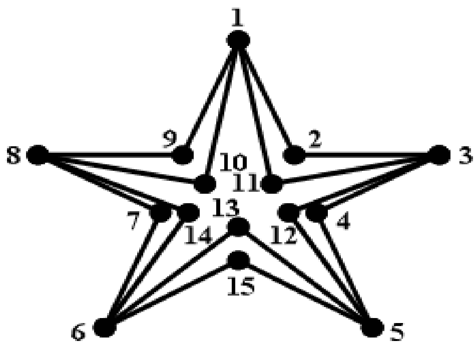
№18



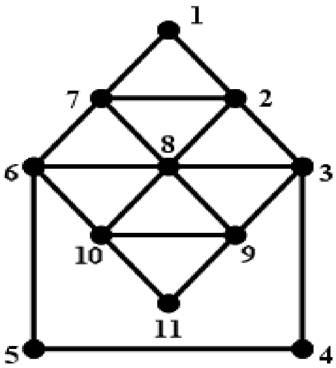
№19



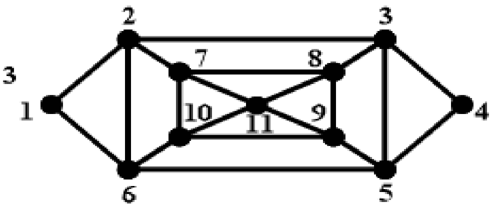
№20



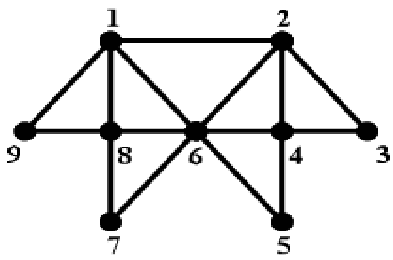
№21



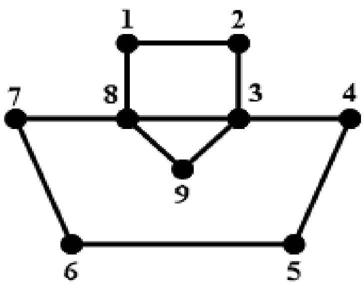
№22



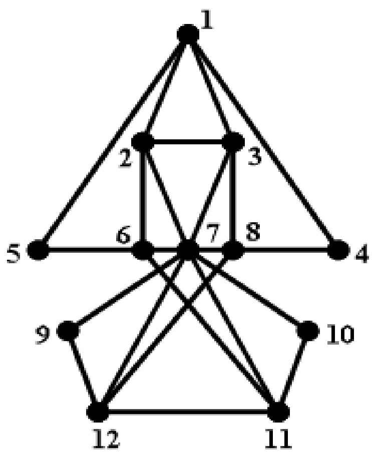
№23



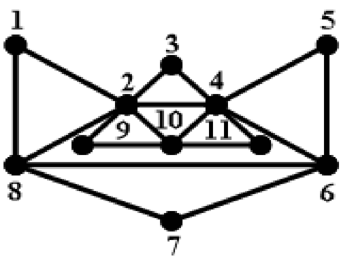
№24



№25



№26



№27

Задача 17. Планарность графов

1. Можно ли граф K_{33} получить стягиванием графа Петерсена?

2. Можно ли граф K_4 получить стягиванием графа K_{33}?

3. Можно ли граф K_4 получить стягиванием графа W_6?

4. В связном плоском графе 30 вершин и 20 граней. Сколько в нем ребер?

5. В связном плоском графе 20 вершин и 19 ребер. Сколько в нем граней?

6. В графе G 12 вершин. Сколько в общем случае проверок необходимо сделать по критерию Понтрягина-Куратовского при поиске подграфа K_5?

7. При каких $n = 1, 2, 3, 4, 5$ граф с числом вершин n (не обязательно полный) является планарным?

8. При каких $n = 2, 3, 4, 5, 6$ двудольный граф с числом вершин n (не обязательно полный) является планарным?

9. Из полного графа на 5 вершинах удалили одну вершину. Будет ли полученный граф планарным? Этот же вопрос для полного графа на 6 вершинах.

10. Из полного графа на 5 вершинах удалили одно ребро. Будет ли полученный граф планарным? Этот же вопрос для полного графа на 6 вершинах.

11. Пусть G_n – неориентируемый граф, вершины которого пронумерованы натуральными числами $\{1, 2, ..., n\}$, а множество ребер определяется следующим условием: несовпадающие вершины υ_i и υ_j смежны тогда и только тогда, когда числа i и j взаимно просты. При каких значениях n графы G_n планарны?

12. Пусть G_n – связный кубический простой плоский граф с n вершинами и φ_k – число его граней, ограниченных k ребрами. Показать, что для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 = 12.$$

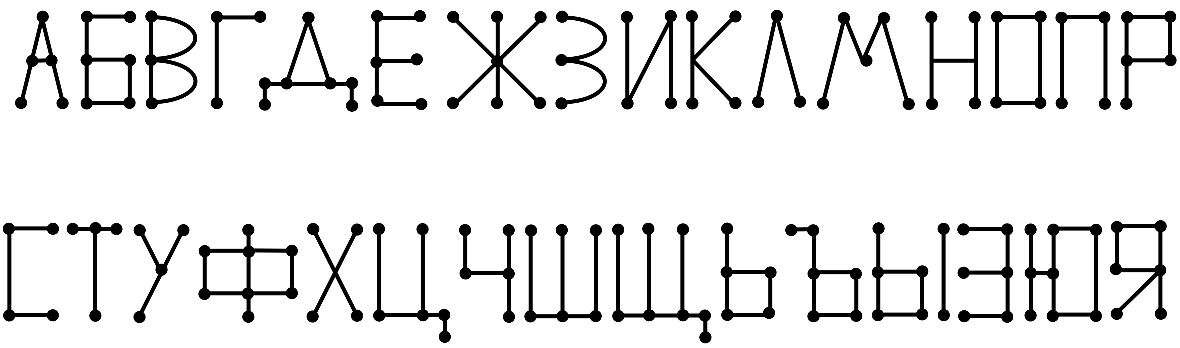
13. Привести пример графа G на восьми вершинах, обладающего тем свойством, что граф G и его дополнение $\bar{G}$ оба планарны.

14. Проверить теорему Эйлера о плоских графах для: a) платоновых графов; b) графа $K_{2,n}$; c) графа W_n; d) графа, образованного вершинами, ребрами и гранями шахматной доски размера 8×8.

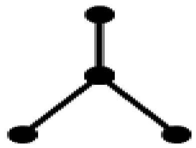
15. При каких n граф K_n планарен?

16. При каких m и n граф $K_{m,n}$ планарен?

17. В перечне букв



укажите буквы гомеоморфные графу, изображенному на рис. 1.



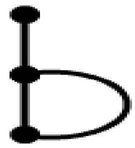
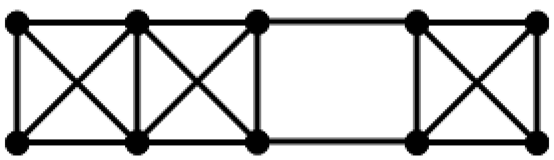


Рис. 1. Рис. 2.

18. В перечне букв (задача 17) укажите буквы гомеоморфные графу, изображенному на рис. 2.

19. Является ли граф, изображенный на рис. 3, планарным?



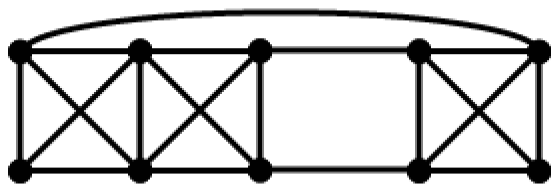
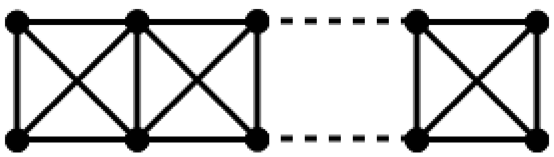


Рис. 3. Рис. 4.

20. Является ли граф, изображенный на рис. 4, планарным?

21. При каких n граф порядка $2n$, изображенный на рис. 5, планарен?



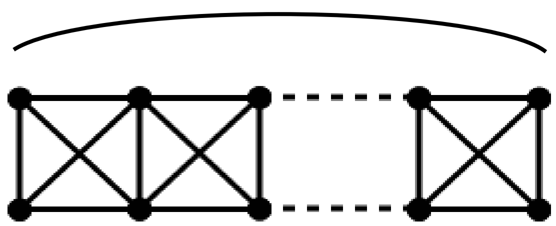


Рис. 5. Рис. 6.

22. При каких n граф порядка $2n$, изображенный на рис. 6, планарен?

23. Является ли граф, изображенный на рис. 7, планарным?

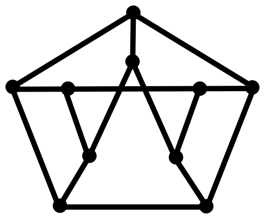


Рис. 7

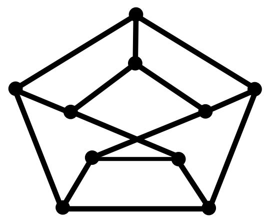


Рис. 8.

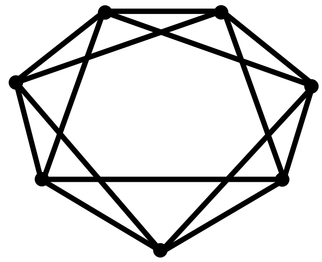


Рис. 9.

24. Является ли граф, изображенный на рис. 8 планарным?

25. Является ли граф, изображенный на рис. 9 планарным?

Задача 18. Раскраска графа

1. Чему равно хроматическое число дерева на 40 вершинах?

2. Найти хроматическое число связного графа, в котором 22 вершины и 22 ребра.

3. Хроматическое число связного графа, содержащего 28 ребер, равно 8. Сколько в нем вершин?

4. Найти хроматические числа платоновых графов.

5. Найти хроматические числа реберных графов тетраэдра и куба.

6. Найти хроматические числа графа $\bar{K}_{3,3}$ и реберного графа графа $K_{3,3}$.

7. Найти хроматическое число объединения графа Петерсена и графа K_2.

8. Найти хроматическое число объединения графа тетраэдра и графа куба.

9. Найти реберное хроматическое число графа куба.

10. Что можно сказать о реберном хроматическом числе $\chi'(G)$ любого графа G?

11. Найти хроматическое число реберного графа дерева с максимальной степенью вершин k?

12. Показать, что для раскраски ребер кубического гамильтонового графа достаточно трех красок.

13. Найти хроматическое число реберного графа звезды $K_{1,n}$?

14. Найти хроматическое число соединения двух простых цепей P_n и P_m.

15. Найти хроматическое графа дополнительного к графу W_n.

16. Квадрат $n \times n$ разбит на n^2 единичных квадратов прямыми, параллельными его сторонам. Найти хроматическое число соединения полученного графа с графом K_n.

17. Два колеса, степени центральных вершин которых равны p и q, соединили ребром, проходящим через центральные вершины. Найти хроматическое число полученного графа.

18. Центральную вершину колеса W_p соединили с не центральными вершинами колеса W_q. Найти хроматическое число полученного графа.

19. Центральную вершину колеса W_p соединили с не центральными вершинами колеса W_q, а центральную вершину колеса W_q соединили с не центральными вершинами колеса W_p. Найти хроматическое число полученного графа.

20. Два колеса, степени центральных вершин которых равны, соединили ребрами: центральную вершину с центральной, а каждую не центральную вершину первого графа с не центральной вершиной второго графа. Найти хроматическое число полученного графа.

21. Два колеса, степени центральных вершин которых равны p и q, соединили ребром, проходящим не через центральные вершины. Найти хроматическое число полученного графа.

22. Найти хроматическое число графа, изображенного на рис. 1.

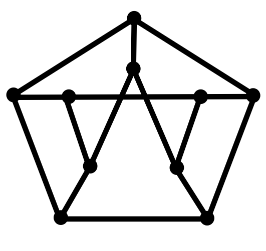


Рис. 1

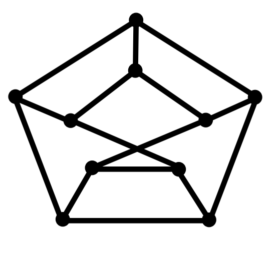


Рис. 2

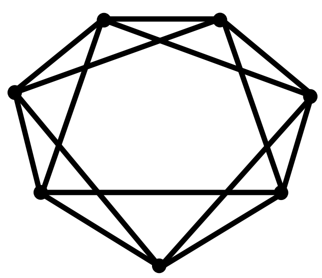


Рис. 3.

23. Найти хроматическое число графа, изображенного на рис. 2.

24. Найти хроматическое число графа, изображенного на рис. 3.

25. Найти хроматическое число объединения графов, изображенных на рис. 1 и 2.

Список литературы

1. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.

2. Берж К. Теория графов и ее приложения. – М.: ИЛ, 1962. – 320 с.

3. Верещагин Н.К., Шень А. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999. – 122 с.

4. Добрынин А.А. Дискретная математика и теория кодирования. – Новосибирск.: НИНХ, 2006. – 188 с.

5. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 2000. – 280 с.

6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. – М.: Наука, 1979. – 300 с.

7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Эвнин А.Ю. Вся высшая математика – 7. Теория чисел. Общая алгебра. Теория Пойа. Теория графов. Парасочетания. Матроиды. – М.: URSS, 2006. – 108 с.

8 Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

9. Мальцев Ю.Н., Петров Е.П. Введение в дискретную математику. – Барнаул.: Алтайский Госуниверситет, 1997. – 138 с.

10. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: МАИ, 1992. – 262 с.

11. Оре О. Графы и их применение. – М.: Мир, 1965. – 174 с.

12. Очан Ю.С. Сборник задач и теорем по теории функций действительной переменной. – М.: Просвещение, 1963. – 232 с.

13. Степанов В.Н. Дискретная математика: множества, комбинаторика, алгебраические структуры, графы. Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. – 196 с.

14. Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 232 с.

15. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Дискретная математика. – Москва – Новосибирск.: ИНФРА-М-НГТУ, 2005. – 256 с.

16. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112 с.

17. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – С.-П.: БХВ – Петербург, 2006. – 396 с.

18. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. – М.: Наука, 1965. – 376 с.

19. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск: «Вышейшая школа», 1982. – 234 с.

20. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971. – 254 с.

21. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 208 с.

22. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. – М.: Мир, 1979. – 264 с.

23. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1979. – 300 с.

24. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. – М.: Техносфера, 2005. – 400 с.

Редактор
Компьютерная верстка, дизайн обложки –ИД № 06039 от 12.10.2001 г.
Сводный темплан 2010 г.
Подписано в печать ..10. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,5.
Тираж . Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ